Numerik — Blatt 10

Abgabe: Freitag, den 20. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Iterationsvorschriften für Splittingverfahren 8 Punkte

Zeigen Sie, dass für das

- (a) Jacobi-Verfahren der m -te Iterationsschritt in Komponentenschreibweise für $j = 1, \dots, n$) wie folgt lautet

$$x_j^{(m)} = \frac{1}{a_{j,j}} \left[b_j - \sum_{k \neq j}^n a_{j,k} x_k^{(m-1)} \right]$$

- (b) Gauß-Seidel-Verfahren der m -te Iterationsschritt in Komponentenschreibweise für $j = 1, \dots, n$) wie folgt lautet

$$x_j^{(m)} = \frac{1}{a_{j,j}} \left[b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} x_k^{(m)} - \sum_{k=j+1}^n a_{j,k} x_k^{(m-1)} \right]$$

- (c) SOR-Verfahren der m -te Iterationsschritt in Komponentenschreibweise für $j = 1, \dots, n$) wie folgt lautet

$$x_j^{(m)} = (1 - \omega) x_k^{(m-1)} + \frac{\omega}{a_{j,j}} \left[b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} x_k^{(m)} - \sum_{k=j+1}^n a_{j,k} x_k^{(m-1)} \right]$$

Aufgabe 2: Splittingverfahren mit Excel 1+2+2+2 Punkte

In der Excel-Datei „Splitting“ wurden mit den in Aufgabe 1 bewiesenen Iterationsvorschriften das Jacobi-, das Gauß-Seidel- und das SOR-Verfahren implementiert. Für die in der Datei auftretende Matrix A wurde der optimale Relaxationsfaktor $\omega = 1,1$ auf eine Stelle hinter dem Komma durch „Ausprobieren“ bestimmt. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeiten der drei Verfahren für die Matrizen A, B, C, D und bestimmen Sie auch für B, C, D den optimalen Relaxationsfaktor ω durch Ausprobieren. Die Matrizen finden Sie in der Datei unter dem SOR-Verfahren.

Aufgabe 3: Gradientenverfahren**4 Punkte**

Gegeben ist das nichtlineare Funktional $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2 + 3} + x^2 + 2y^2.$$

Führen Sie ausgehend von $x_0 = (1, 1)^t$ fünfzehn Schritte mit dem Gradientenverfahren zur Bestimmung des globalen Minimums von g aus. Sie können das Verfahren natürlich in Excel implementieren.