Wavelets

Maximilian Wank

LMU München

Haslach am 18.02.2012

Fourier-Transformation

Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiere die Fouriertransformierte via

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dt.$$

Grundlegende Eigenschaften:

(i) $\hat{f}$ ist gleichmäßig stetig.

(ii) $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$

Rechenregeln für die Fouriertransformierte

Mit $T_h f(t) := f(t-h)$ und $D_a f(t) := f\left(\frac{t}{a}\right)$ gelten:

- $(T_h f)\hat{}(\xi) = e^{-i\xi h}\hat{f}(\xi)$,
- $(e^{i\omega t} f)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi - \omega)$,
- $(D_a f)\hat{}(\xi) = |a| D_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\xi)$,
- $(f')\hat{}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$ für $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ und $f' \in L^1$ sowie
- $(\xi f)\hat{}(\xi) = i(\hat{f})'(\xi)$ für $f, tf \in L^1(\mathbb{R})$.

Parseval-Plancherel und die Fourier-Umkehrtransformation

Es gilt die Formel von *Parseval-Plancherel:* für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ist

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Für $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist die *Fourier-Umkehrtransformation*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} \, d\xi \qquad \text{f.ü.}$$

Definition und äquivalente Bedingung

Eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Wavelet* genau dann, wenn

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \tag{1}$$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|} \, da =: C_\psi < \infty \tag{2}$$

Dabei ist (2) äquivalent zu:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \, dt = 0 \text{ bzw. } \hat{\psi}(0) = 0.$$

Definition und äquivalente Bedingung

Eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Wavelet* genau dann, wenn

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ mit } \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \tag{1}$$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \frac{|\hat{\psi}(a)|^2}{|a|} \, da =: C_\psi < \infty \tag{2}$$

Dabei ist (2) äquivalent zu:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \, dt = 0 \text{ bzw. } \hat{\psi}(0) = 0.$$

Die Wavelet-Transformierte

Für ein festes Wavelet ψ definiere die *Wavelet-Transformierte* von $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch

$$\mathcal{W}f(a,b) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\,dt \qquad (a \neq 0)$$

Mit der Schreibweise $\psi_{a,b}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ist

- $\|\psi_{a,b}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, damit: $\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$!
- $\mathcal{W}f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle$.

Plancherel-Formel

Hilbertraum $H := L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_H = \int_{\mathbb{R}} f(a,b)\overline{g(a,b)}\,\frac{da\,db}{|a|^2}.$$

Gilt

$$2\pi \int_{\mathbb{R}^*} \frac{\overline{\hat{\psi}(a)}\hat{\xi}(a)}{|a|}\,da =: C_{\psi\chi} < \infty, \tag{3}$$

so ist für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{W}_\psi f, \mathcal{W}_\chi g \rangle_H = C_{\psi\chi} \langle f, g \rangle.$$

Ist $\psi = \chi$, so ist (3) mit $C_{\psi\chi} = C_\psi$ bereits erfüllt.

Eine Umkehrformel (1/2)

Plancherel und $\mathcal{W}f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$ ergeben für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ zusammen

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \langle \chi_{a,b}, g \rangle \frac{da\, db}{|a|^2} = C_{\psi\chi} \langle f, g \rangle,$$

was mit dem Satz von Fubini zu $\langle h, g \rangle = \langle f, g \rangle$ wird. Daraus lässt sich

$$f = \frac{1}{C_{\psi\chi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \chi_{a,b} \frac{da\, db}{|a|^2}$$

im $L^2(\mathbb{R})$-Sinne folgern.

Eine Umkehrformel (2/2)

Punktauswertung unter den Voraussetzungen:

- $\psi, \chi \in L^1(\mathbb{R})$ so, dass (3) erfüllt ist,
- χ differenzierbar mit $\chi' \in L^2(\mathbb{R})$, $t\chi \in L^1(\mathbb{R})$,
- $\hat{\psi}(0) = \hat{\chi}(0) = 0$,
- $f \in L^2(\mathbb{R})$ beschränkt.

Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi\chi}} \lim_{\substack{A_1 \to 0 \\ A_2 \to \infty}} \int_{\mathbb{R}} \int_{A_1 \leq |a| \leq A_2} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \chi_{a,b}(t) \, \frac{da\, db}{|a|^2}$$

in jedem Stetigkeitspunkt t von f.

Beweisskizze

Beweisskizze von letzter Folie, alternativ eine Folie über $\psi_{a,b}$ mit Grafik, was T_b und D_a bewirken.

Diskretisierung der Wavelettransformierten

Aus Symmetriegründen (es gilt $\psi_{a,b}(t) = \psi_{-a,-b}(-t)$) sei $a > 0$
Die Zulässigkeitsbedingung wird zu

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|}\,dt < \infty.$$

Diskretisierung der Parameter a und b via:

- $a \rightsquigarrow a_0^m$ für $m \in \mathbb{Z}$
- $b \rightsquigarrow n b_0 a_0^m$ für $m, n \in \mathbb{Z}$

Damit definiere auch

$$\psi_{m,n}(t) := a_0^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{t - n b_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m} t - n b_0).$$

Frames

Eine Familie von Funktionen $(\varphi_i)_{i \in I}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *Frame* genau dann, wenn es $A > 0$ und $B < \infty$ gibt, sodass für alle $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

gilt. Ist $A = B$, so spricht man von einem *straffen* Frame.
Im straffen Fall gilt mindestens $f = A^{-1} \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$.

ACHTUNG: auch ein straffer Frame muss keine Basis sein!

Beispiel: die Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ bilden einen straffen Frame mit Framekonstante $A = \frac{3}{2}$.

Der Frameoperator

Für einen Frame $(\varphi_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{H}$ definiere den *Frame-Operator*
$F : \mathcal{H} \to \ell^2(I) := \{c = (c_i)_{i\in I} \mid \|c\|^2_{\ell^2(I)} := \sum_{i\in I} |c_i|^2\}$ durch

$$(Ff)_i := \langle f, \varphi_i \rangle.$$

Eigenschaften:

- Aus $\langle F^*c, f\rangle = \sum_{i\in I} c_i \langle \varphi_i, f\rangle$ lässt sich $F^*c = \sum_{i\in I} c_i\varphi_i$ im schwachen Sinn folgern.
- Der Operator F^*F ist invertierbar.

Duale Frames

Nutze Invertierbarkeit von F^*F um eine „duale“ Familie zu definieren:

$$\tilde{\varphi}_i := (F^*F)^{-1}\varphi_i$$

Dann gilt: $(\tilde{\varphi}_i)_{i\in I}$ ist ein Frame mit Framekonstanten B^{-1} und A^{-1}, also:

$$B^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, \tilde{\varphi}_i\rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Der assoziierte Frame-Operator $\tilde{F} : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$, $(\tilde{F}f)_i = \langle f, \tilde{\varphi}_i\rangle$ erfüllt

$$\tilde{F}^*F = \mathrm{Id} = F^*\tilde{F}.$$

Rekonstruktionsformel

Damit ist eine Rekonstruktionsformel via

$$\sum_{i\in I} \langle f, \varphi_i \rangle \tilde{\varphi}_i = f = \sum_{i\in I} \langle f, \tilde{\varphi}_i \rangle \varphi_i$$

gegeben. Es gilt sogar, falls $f = \sum_{i\in I} c_i \varphi_i$ für ein $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, dass

$$\sum_{i\in I} |c_i|^2 \geq \sum_{i\in I} |\langle f, \tilde{\varphi}_i \rangle|^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(c_i)_{i\in I} = (\langle f, \tilde{\varphi}_i \rangle)_{i\in I}$.