Die Korn'schen Ungleichungen

Alexander Schmidt

18-02-2012

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(|v^i(x)|^2 + |(e_{ij}v)(x)|^2\right) \, \mathrm{d}x, \quad (1)$$

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offene Menge, $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld, dann ist
$\mathcal{E}\mathbf{v} = (\mathcal{E}_{ij}\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_i v^j + \partial_j v^i) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v})$
der symmetrische Gradient von $\mathbf{v}$

Abschätzung für $\mathcal{E}\mathbf{v}$

- $|\mathcal{E}\mathbf{v}| \leq |\nabla\mathbf{v}|$, woraus folgt
- $\|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p \leq \|\nabla\mathbf{v}\|_p \leq \|\mathbf{v}\|_{1,p}$.

Die Rückrichtung der ersten Ungleichung gilt hingegen nicht:
$R^T = -R$ schiefsymmetrische Matrix und $v = Rx$
dann ist: $\nabla v = R$, $\mathcal{E}v = 0$.

Die Korn'schen Ungleichungen spielen eine wichtige Rolle in der Elastizitätstheorie.
Die Behandlung von Variationsproblemen die von $\mathcal{E}\mathbf{v}$ abhängen macht eine „Umkehrung" der obigen Ungleichung wünschenswert.
Die Kornschen Ungleichungen sind dieser Problemstellung angepasst.

Korn 2 und Korn 1

Theorem: Für $p \in (1, \infty)$ sei $\mathbf{v} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sei weiters $\mathcal{E}\mathbf{v} \in L^p(\Omega; \mathbb{S}^n)$. Dann gilt:

- $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und es gibt ein $c = c(n, p, \Omega) > 0$ so daß $\|\mathbf{v}\|_{1,p} \leq \|\mathbf{v}\|_p + \|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p$
- Sei weiterhin $\|\mathbf{v}\| \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, dann gilt $\|\mathbf{v}\|_{1,p} \leq c\|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p$.

Das sind Korn's zweite und erste Ungleichung.

Im Falle p=2 lautet die erste Korn'sche Ungleichung
$\|\mathbf{v}\|_{1,2} \leq c\|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_2$ mit $c = c(n,\Omega)$.
Für $p = 2$ einfacher Beweis:

Beweisskizze:

- Sei $\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann folgt durch Rechnung:
- $2 \int_\Omega |\mathcal{E}\mathbf{v}|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 dx$
- $\mathring{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $\mathring{W}^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.
- Behauptung folgt aus Poincaré-Ungleichung
  $\|u\|_{1,p} \leq c\|\nabla u\|_p \quad \square$.

Bevor wir uns ein wenig in technischen Details suhlen eine kurze Skizze der Beweisidee:

- Definition von Sobolevräumen mit negativer Norm
- Eigenschaften von Vektorfeldern $\mathbf{v} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und ein nützliches Lemma
- Beweis Korn 2 durch Isomorphie von Banachräumen
- Bewéis Korn 1 mit Widerspruch und Hilfe von Korn 1 und
- Satz von Kondrachov (kompakte Einbettung)

Sei $q \in (1, \infty), \Omega \subset \mathbb{R}$ beschränktes Lipschitzgebiet.
Das normierte Dual des Sobolev-Raums $\mathring{W}^{k,q}(\Omega)$ stimmt mit dem Raum $W^{-k,p}(\Omega)$ überein, wobei $p = \frac{q}{q-1}$ den *dualen Exponenten* bezeichnet.

Definition negative Norm

$$\|w\|_{-k,p} := \sup_{\substack{\phi \in \mathring{W}^{k,q}(\Omega) \\ \|\phi\|_{k,q}=1}} \left| \int_\Omega w\phi dx \right|$$

$W^{-k,p}(\Omega)$ ist isometrisch isomorph zum Dualraum $\mathring{W}^{k,q}(\Omega)^*$.

Der Raum $E^p(\Omega)$

Sei $E^p(\Omega)$ der Raum der Vektorfelder $\mathbf{v} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

- $E^p(\Omega)$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $\|\mathbf{v}\|_{E^p(\Omega)} := \|\mathbf{v}\|_p + \|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p$
- Die Einbettung $\mathcal{I} : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})^n \hookrightarrow E^p(\Omega), \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ ist stetig.

Weiterhin gilt: Für $\mathbf{v} \in E^p(\Omega)$ ist $\partial_j \mathbf{v}^i \in W^{-1,p}(\Omega)$ und

- $\partial_k \partial_j \mathbf{v}^i = (\partial_k \mathcal{E}_{ij} + \partial_j \mathcal{E}_{ik} - \partial_i \mathcal{E}_{jk})\mathbf{v}$.

Für den weiteren Beweis ein nützliches Lemma:
Sei wie gehabt $\Omega \in \mathbb{R}^n$ beschränktes Lipschitzgebiet, $p \in (1, \infty), w \in W^{-k,p}(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen $\partial_j w \in W^{-k,p}(\Omega)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

Necas Lemma

$w \in W^{-k+1,p}(\Omega)$ und es gibt ein $c = c(n, p, \Omega) > 0$ so daß $\|w\|_{-k+1,p} \leq c(\|w\|_{-k,p} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j w\|)_{-k,p}$.

mit Necas Lemma folgt

- $\|\partial_j v^i\|_p \leq c_1(\|\partial_j v^i\|_{-1,p}) + \sum_{k=1}^n \|\partial_k \partial_j v^i\|_{-1,p})$
- damit: $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und die Einbettung $\mathcal{I}$ ist surjektiv
- ergo stimmen $E^p(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit äquivalenten Normen überein
- ergo $\exists c = c(n, \Omega)$ mit $\|\mathbf{v}\|_{1,p} \leq c(\|\mathbf{v}\|_p + \|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p) \quad \square.$

Teil 1

Benutzt man die zweite Kornsche Ungleichung so reicht es zu zeigen:
$\|\mathbf{v}\|_p \leq c_3 \|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p$
Der Beweis für Korn 1 geht über Widerspruch. Sei dazu

- $(\mathbf{v})_m \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\|\mathbf{v}_m\|_p = 1$
- sowie $\|\mathcal{E}\mathbf{v}_m\|_p < 1/m$.

Teil 2

Mit Korn 2 folgt nun:
$\|\mathbf{v}_m\|_{1,p} \leq c_2(\|\mathbf{v}\|_p + \|\mathcal{E}\mathbf{v}\|_p) \leq c_2(1 + 1/m)$
Damit ist $\|\mathbf{v}_m\|_{1,p}$ nach oben beschränkt. Weiters gilt:

- $\mathbf{v}_m \rightharpoonup \mathbf{v}$ in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$
- $\mathbf{v}_m \to \mathbf{v}$, starke Konvergenz in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$
- für $\mathbf{v} \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\|\mathbf{v}\|_p = 1, \|\mathcal{E}\mathbf{v}\| = 0$
- somit $\mathcal{E}\mathbf{v} = 0$

Teil 3

- $E_\Omega : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \to L^p(\Omega; \mathbb{S}^n)$, mit $\mathbf{v} \to \mathcal{E}\mathbf{v}$
- E_Ω ist beschränkt und linear
- $Ker E_\Omega = 0$
- damit ist muss auch $\mathbf{v} = 0$ sein, im $\lightning$ zu $\|\mathbf{v}\|_p = 1 \quad \square$.