Variationsrechnung

Michaela Pröll

LMU Munich, Germany

München, 17.02.12

Betrachte für Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ und $p \in (1, \infty)$ das Funktional

$$J[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p \, \mathrm{d}x,$$

das offenbar für die Funktionen $w \in W^{1,p}(\Omega)$ wohldefiniert ist.

Ziel:

Das Funktional $J[w]$ soll in der Teilklasse

$$\mathscr{C} := \{w \in W^{1,p}(\Omega);\ w - u_0 \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)\} = u_0 + \mathring{W}^{1,p}(\Omega)\}$$

mit einer fixierten Funktion $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ minimiert werden.

Lemma 1

Sei X ein normierter Raum, (x_k) konvergiere schwach gegen ein $x \in X$.

Dann gibt es eine Folge (y_k), so dass y_k in der konvexen Hülle $\{x_l, l \geq k\}$ liegt mit $y_k \to x,\ k \to \infty$.

Beweis

Definiere M_i als konvexe Hülle von $\{x_i, x_{i+1}, \dots\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Annahme: $\exists \varepsilon > 0$ mit $\|x - y\| \geq \varepsilon \; \forall y \in M_1$.

Sei $L := \left\{ z \in X : \; \exists u \in M_1 \text{ mit } \|z - u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Dann gilt:

1) $L \supset M_1$ und damit $\overline{L} \supset M_1$

2) $\overline{L}$ ist konvex, da L konvex

3) $x \notin \overline{L}$

Trennungssatz $\Rightarrow$ es existiert $\Phi \in X^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\Phi \leq \alpha$ auf $\overline{L}$ und

$\Phi(x) > \alpha$ ↯

Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M_1$ mit $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Es existiert eine Folge $\left(v_k^1\right) \subset M_1$ mit $\left\|v_k^1 - x\right\| \to 0,\ k \to \infty$.

Definiere y_1 als erstes Folgenglied von $\left(v_k^1\right)$ mit $\left\|v_k^1 - x\right\| \leq 1$ und seien $y_1, \ldots, y_n$ konstruiert mit $y_i \in M_i,\ \|y_i - x\| \leq \frac{1}{i},\ i = 1, \ldots, n$.

Existenz einer Folge (w_l) Teilmenge der konvexen Hülle $\{x_{1+n}, x_{2+n}, \ldots\} = M_{k+1}$ mit $\|w_l - x\| \to 0,\ l \to \infty$.

Man wähle l_0 als kleinsten Index mit $\|w_l - x\| \leq \frac{1}{i+1}$ und setze $y_{k+1} := w_{l_0}$. $\square$

Lemma 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand $1 < p < \infty$.

a) Für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_p \leq c(\Omega)\|\nabla u\|_p$$

b) Für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|u - (u)_\Omega\|_p \leq c(\Omega)\|\nabla u\|_p, \quad (u)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \int_\Omega u \,\mathrm{d}x$$

Beweis

a) *Annahme:* Die Aussage ist falsch.

Es gibt eine Folge $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_p \geq k\|\nabla u_k\|_p$.

Für $v_k := \dfrac{u_k}{\|u_k\|_p} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ folgt $\|v_k\|_p = 1,\ \|\nabla v_k\|_p \leq \dfrac{1}{k}$

$$\Rightarrow\ \tilde{v}_k \rightharpoonup v \in W^{1,p}(\Omega)$$

Schwaches Auswahlprinzip $\Rightarrow\ \nabla \tilde{v}_k \to 0 \in L^p(\Omega)$ und damit

$$\nabla \tilde{v}_k \rightharpoonup 0 \in L^p(\Omega)$$

Eindeutigkeit des schwachen Limes $\Rightarrow\ \nabla v = 0$ und damit $v = 0$.

Aus der kompakten Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ folgt

$\tilde{\tilde{v}}_k \to v \in L^p(\Omega)$.

$$\Rightarrow \ v\|_p = 1 \lightning v = 0$$

b) Vorgehen analog, betrachte zunächst Funktionen mit

$$(u)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0$$

und man erhält die gewünschte Ungleichung durch Subtrahieren des Mittelwerts. $\square$

Satz

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand sowie $1 < p < \infty$.

Dann hat das Minimierungsproblem

$$J[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p \, \mathrm{d}x \to \min$$

in der Klasse $\mathscr{C}$ eine eindeutige Lösung.

Beweis

Betrachte die Minimalfolge

$$(u_n) \subset \mathscr{C} : \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, \mathrm{d}x \to \inf_{\mathscr{C}} J$$

Offenbar gilt $\sup_n \|\nabla u_n\|_p < \infty$ und mit der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\|u_n\|_p \leq c\|\nabla u_n\|_p + c\|u_0\|_{1,p}$$

$\Rightarrow \sup_n \|u_n\|_p < \infty$ und $\sup_n \|u_n\|_{1,p} < \infty$

Schwaches Auswahlprinzip $\Rightarrow \tilde{u}_n \rightharpoonup u \in W^{1,p}(\Omega)$

Schwache Abgeschlossenheit von $\mathscr{C}$ $\Rightarrow u \in \mathscr{C}$

Zu zeigen: u ist J-minimal.

Benutze Lemma 2 und wähle die Folge

$$\sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \tilde{u}_i \in u_0 + W_0^{1,p} \text{ mit } \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k = 1,\ \alpha_i \geq 0$$

Mit der Konvexität der Abbildung $t \to t^p$ folgt:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \leq \lim_k \int_\Omega \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \,|\nabla \tilde{u}_i|^p \,\mathrm{d}x = \inf_{\mathscr{C}} J$$

Die letzte Gleichheit folgt aus

$$\left| \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \int_\Omega |\nabla \tilde{u}_i|^p - \inf_{\mathscr{C}} J \right| \leq \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \varepsilon = \varepsilon$$

für $n(k) \geq n_0$, da $(\tilde{u}_i)$ Minimalfolge und somit gilt

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \leq \inf_{\mathscr{C}} J$$

und da $u \in \mathscr{C}$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x = \inf_{\mathscr{C}} J$$

$\Rightarrow$ u ist ein J-Minimierer.

Zu zeigen: Eindeutigkeit.

Annahme: Es gibt zwei Minimierer $u_1, u_2 \in \mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ konvex $\Rightarrow\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in \mathscr{C}$

Mit strenger Konvexität der Abbildung $t \to t^p$ für $p \in (1, \infty)$ folgt:

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right)\right|^p \mathrm{d}x < \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_2|^p \,\mathrm{d}x$$

$$= \inf_{\mathscr{C}} J \quad \lightning$$

$\square$

Verallgemeinerung

Sei $F : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ stetig und konvex, dann hat das Minimierungsproblem

$$\int_\Omega F(\nabla w)\,\mathrm{d}x \to \min$$

in $\mathscr{C}$ eine Lösung, falls

$$F(Z) \geq c_0|Z|^p - c_1 \quad \forall Z \in \mathbb{R}^d$$

gilt. Falls F streng konvex ist, ist die Lösung eindeutig.