Prof. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, M. Wank 12.06.2013

Numerik II — Blatt 8

Aufgabe 1: 2 Punkte

Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein *s-stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren (RKV)* hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_{h,0} \\ t_{j+1} &:= t_j + h \\ u_{j+1} &:= u_j + h\varphi(t_j,\, u_j,\, h) \end{aligned}$$

mit jeweils $j = 0, 1, ..., m-1$, wobei die sogenannte *Verfahrensfunktion* φ mit Hilfe der sukzessiven Berechnung der Größen

$$\begin{aligned} v_1(t,u) &:= f(t,\, u) \\ v_2(t,u) &:= f(t + c_2 h,\, u + h a_{21} v_1(t,u)) \\ v_s(t,u) &:= f(t + c_s h,\, u + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} v_i(t,u)) \end{aligned}$$

durch

$$\varphi(t,\, u,\, h) := \sum_{i=1}^{s} b_i v_i(t,u)$$

definiert ist (Die v_j hängen auch noch von h ab). Dabei sind die Koeffizienten a_{ki}, b_i, c_i geeignet gewählte reelle Zahlen, die das Verfahren vollständig festlegen. Zur Beschreibung eines RKV ordnet man sie gewöhnlich nach dem sogenannten *Butcher-Tableau* an.

(a) Stellen Sie das verbesserte Eulerverfahren als RKV dar

(b) Stellen Sie die Koeffizienten in einem Butcher-Tableau dar.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Zweistufige explizite RKV haben die Form

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_{h,0} \\ t_{j+1} &:= t_j + h \\ v_1(t,u) &:= f(t,\, u) \\ v_2(t,u) &:= f(t + ch,\, u + a v_1(t,u)) \\ \varphi(t,\, u,\, h) &:= b_1 v_1(t,u) + b_2 v_2(t,u) \\ u_{j+1} &:= u_j + h\varphi(t_j,\, u_j,\, h) \end{aligned}$$

(a) Betrachten Sie v_2 als eine auch von h abhängige Funktion. Entwickeln Sie v_2 um $h = 0$ mit Taylor, so dass sie etwa $v_2(h) = ... + O(h^2)$ stehen haben.

(b) Sei u die exakte Lösung. Entwickeln Sie die von h abhängige Funktion w mit

$$w(h) := u(t + h)$$

um $h = 0$ mit Taylor, so dass sie etwa $w(h) = ... + O(h^2)$ stehen haben.

(c) Berechnen Sie a, b_1, b_1 in Abhängigkeit von c, so dass der Diskretisierungsfehler

$$\tau_k^h := \frac{1}{h}(u(t_k) - u(t_{k-1})) - \varphi(t_{k-1},\, u(t_{k-1}),\, h) \in O(h^2).$$

(d) Erfüllen die Koeffizienten aus Aufgabe 1 die in (c) gefundenen Bedingungen?

Aufgabe 3: Bedingungen an Koeffizienten **4 Punkte**

Gegeben sei das 3-stufige Runge-Kutta Verfahren von Heun

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b^T} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}, \tag{3.1}$$

sowie folgende Tabelle, welche Ihnen angibt, welche Bedingungen die Koeffizienten zu erfüllen haben, damit das jeweilige Verfahren die entsprechende Ordnung besitzt:

Ordnung	**Bedingungen**
1	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i = 1$
2	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i = \frac{1}{2}$
3	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$
4	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$ $\sum_{i,j,k=1}^{\nu} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$

(3.2)

Zeigen Sie, dass es sich um ein Verfahren 3. Ordnung handelt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Das *Impliziten Eulerverfahrens* (IE) ist defineirt durch

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1});$$

das *Trapezverfahrens* (TV) ist definiert durch

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1})).$$

Stellen Sie die beiden Verfahren (IE) und (TV) in einem Bucher-Tableau dar.

Aufgabe 5: Gronwall Lemma **4 Punkte**

Es sei $w'(t) \leq aw(t)$ mit $a > 0$ für alle $t \in [0, d)$.

(a) Zeigen Sie für das Vergleichsproblem $v' = av$, $v(0) = w(0)$, dass

$$(v - w)(t)e^{-at}$$

in $[0, d)$ steigend ist.

(b) Folgern Sie daraus Gronwalls Lemma: $w(t) \leq w(0)e^{ta}$.