Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, M. Wank 05.06.2013

Numerik 2 — Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, den 12. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Wir betrachten das (AWP):

$$u'(t) = \lambda u(t),\ u(0) = u_0.$$

Weiters sei das Gitter $I_h := \{0 = t_0, ..., t_N = 1\}$, wobei $t_j := jh := \frac{j}{N}$. Die approximierende Funktion $u_h : I_h \to \mathbb{R}$ sei durch das verbesserte Eulerverfahren definiert:

$$\begin{aligned} &u_h(0) := v_0 := u_0,\ \tilde{t_j} = t_j + \frac{h}{2},\ \tilde{v_j} := v_j + \frac{h}{2} f(t_j, v_j) \\ &u_h(t_{j+1}) := v_{j+1} := v_j + hf(\tilde{t_j}, \tilde{v_j}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Zeigen Sie, an dem obigen Beispiel, dass das Verfahren die Konvergenzordnung 2 besitzt, d.h.

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u(t_i) - u_h(t_i)| = O(h^2).$$

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Bitte beachten Sie, zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe benötigen Sie die Excel-Datei Uebung3 - Aufgabe 2 - Angabe.xls welche auf unserer Hompage (ganz unten) zu finden ist. Wir betrachten das AWP:

$$u' = u^2,\ u(0) = 1.$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Sie sollen für die Schrittweiten $h = 2^{-1}$, ..., 2^{-10} (Zeile 4) den jeweiligen Fehler (Zeile 7), sowie $-\log_2(|\text{Fehler}|)$ (Zeile 11) an der Stelle $t = 0.5$ bei Verwendung des verbesserten Eulerverfahrens gegenüber dem exakten Wert $u(0.5) = 2$ berechnen.

Im Calculator von OpenOffice können Sie unter *Extras* $\to$ *Optionen* $\to$ *OpenOffice.org Calc* $\to$ *Berechnen* einstellen, dass die *Genauigkeit wie angezeigt* berechnet werden soll. Stellen Sie für sämtliche Spalten die Zahlen auf *Wissenschaft* mit *Format-Code 0,0000000E+000*. Damit arbeiten wir in dieser Datei sozusagen mit einer Rechenanlage mit achtstelliger Genauigkeit.

(a) Im Tutorium 2 haben Sie das verbesserte Eulerverfahren kennengelernt. Verkürzen Sie den Pseudo Code (1.1) in die Form

$$v_0 := u_0,\ v_{j+1} := ...$$

(b) Implementieren Sie in der Datei das verbesserte Eulerverfahren für die Schrittweiten $h = 2^{-1}$, ..., 2^{-10} (ab Zeile 30, Spalte B bis K). Berechnen Sie anschließend den Fehler bei der jeweiligen Schrittweite in Zeile 7 sowie dessen Abwandlungen in Zeile 9 und 11.
Erstellen Sie ein Diagramm mit x-Achse $-\log_2(\text{Schrittweite})$ und y-Achse $-\log_2(|\text{Fehler an Stelle } 0.5|)$.

Zusatzaufgabe: (+2P)
Für Schrittweiten $h = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$, sollten die entsprechenden Punkte im Diagramm in etwa auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden (Siehe dazu Numerik 1: Gaußsche Ausgleichgerade) und Interpretieren Sie das Ergebnis.
Bemerkung: Falls Sie keine Werte zur verfügung haben konnen sie die Punkte $(4; 6,65E+0)$, $(5; 8,53E+0)$, $(6; 1,05E+1)$, $(7; 1,24E+1)$ verwenden.

Zur Form der Abgabe dieser Aufgabe: Die von Ihnen vervollständigte Excel-Datei ist nicht abzugeben. Bitte reichen Sie zu Teilaufgabe (b) die Spalten A bis K von Zeile 1 bis etwa 31 oder mehr auf eine DinA4 (Querformat) bei. Bei Fragen bzgl. Excel oder OpenOffice können Sie sich an www.google.de oder johann.b.irl@googlemail.com wenden.
Sie werden zu dieser Datei in den nächsten Wochen nochmals eine Aufgabe gestellt bekommen. Speichern Sie die Datei unter anderem aus diesem Grund vorübergehend.

Aufgabe 3: 5 Punkte (a) Zeigen Sie wenn $f \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$, so ist f Lipschitz stetig, mit Lipschitzkonstante $L = \|f'\|_{L^\infty([a,b])}$.

(b) Zeigen Sie dass jedes $f : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, welches Lipschitzstetig ist, eine schwache Ableitung besitzt und in $W^{1,\infty}([a,b])$ ist.