

Numerik 2 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 3. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2 + 2 + 3 = 7 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- (a) $x'(t) = 1 - x(t) + t$, $x(t_0) = x_0$ mit den Anfangsbedingungen $t_0 \geq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
- (b) $x'(t) - x^2(t) = 1$, $x(0) = 0$
- (c) $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$ mit $a > 0$, $b \geq 0$ und der Anfangsbedingung $x(0) = c \geq 0$. Begründen Sie, warum diese Differentialgleichung die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Population modelliert und interpretieren Sie den Grenzübergang für $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2: Picard-Lindelöf **2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte**

Sei $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ mit $(t_0, x_0) \in D$ und $0 \leq t_0 \in I \equiv [t_0, a]$. Zeigen Sie das Folgende:

- (a) Eine stetige Funktion $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems für $t \in I$, wenn sie Fixpunkt des Operators

$$T: C([t_0, a], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, a], \mathbb{R}^n), \quad T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

ist.

- (b) Sei nun explizit $I \equiv [t_0, a]$ mit $a > t_0$. Durch die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ wird $C([t_0, a], \mathbb{R}^n)$ zu einem normierten Raum. Zeigen Sie, dass für jedes $L > 0$ durch

$$\|x\| \equiv \max_{t \in [t_0, a]} |x(t)| e^{-2L(t-t_0)}$$

eine zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalente Norm definiert wird.

- (c) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bezüglich x Lipschitz-stetige Funktion. Nützen Sie die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben, um zu zeigen: Es existiert eine eindeutige Lösung $x \in C([t_0, a], \mathbb{R}^n)$ des obigen Anfangswertproblems. (Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass T eine Kontraktion bez. $\|\cdot\|$ ist.)
- (d) Würde es auch genügen zu zeigen, dass T^m für ein $m \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|$ ist, um die gewünschte Existenz- und Eindeutigkeitsaussage aus Teilaufgabe (c) zu erhalten? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= y^2 - x^2 \\ y' &= xy. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie das zugehörige Richtungsfeld und Phasenporträt.