Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacker, F. Gmeineder, M. Wank 22.05.2012

Fortgeschrittene numerische Mathematik — Blatt 5 - Vorschlag

Abgabe: Mittwoch, den 29. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3+4+4+4=15 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie die Hölderräume in Einbettungssätzen kennengelernt. In dieser Aufgabe wollen wir diese etwas unhandlichen Räume näher untersuchen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge. Wir definieren die γ-te Hölder Seminorm einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ via

$$[f]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \equiv \sup_{x,y\in\Omega \,\&\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

Der k,γ-te *Hölder Raum* $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ besteht aus allen Funktionen $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ sodass

$$||f||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty$$

Hierbei sei $\gamma \geq 0$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $||\cdot||_{C^{k,\gamma}}$ definiert eine Norm auf $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Diskutieren Sie, ob in der obigen Definition der Höldernorm $C\left(\overline{\Omega}\right)$ durch $C(\Omega)$ ersetzt werden kann.

(ii) $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ ist ein Banachraum in Bezug auf die gegebene Norm.

(iii) Nun sei $0 < \beta < \gamma \leq 1$. Dann gilt

$$||f||_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq ||f||_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \cdot ||f||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

Diskutieren Sie, ob diese Ungleichung scharf ist.

(iv) Sei $0 < \lambda < 1$. Eine messbare Funktion $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ liegt in dem *Campanato-Raum* $L^{1,\lambda}(\Omega)$, falls

$$[f]_\lambda := \sup_{x_0\in\Omega} \sup_{B_r(0)\subset(\Omega)} \frac{1}{r^\lambda} \fint_{B_r(0)} |u(y) - \langle u\rangle_{r,x_0}|\, dx < \infty$$

wobei

$$\langle u\rangle_{r,x_0} := \fint_{B_r(0)} u dx =: \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u dx$$

ist. Zeigen Sie $L^\lambda(\Omega) \cap C^0(\Omega) = C^\gamma(\Omega)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei

$$\Omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 < x_1 < 1,\, 0 < x_2 < x_1^2\right\}$$

Zeigen Sie, dass ein $p > 2$ existiert, sodass $W^{1,p}(\Omega)$ nicht in $C(\overline{\Omega})$ einbettet.