Prof. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, M. Wank 15.05.2013

Numerik 2 — Blatt 4

Aufgabe 1: **2+2+2 Punkte**

Es seien

$$\hat{e}_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie $\hat{T} := \operatorname{conv}(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2)$ und $T := \operatorname{conv}(e_0, e_1, e_2)$.

(a) Berechnen Sie die affin-lineare Abbildung $F : \hat{T} \to T$ mit $F(\hat{e}_i) = e_i$ für alle $i = 1, 2, 3$.

(b) Es sei $\hat{T}$ der Einheitssimplex des $\mathbb{R}^n$ und $T = \operatorname{conv}(\{e_0, \dots, e_n\})$ ein nicht entarteter Simplex. Zeigen Sie, dass es genau eine affin-lineare Abbildung $F : \hat{T} \to T$ mit $F(\hat{e}_i) = e_i$ für alle $i = 0, \dots, n$ gibt.

(c) Sei $\hat{u} \in C^1(\hat{T}, \mathbb{R})$ eine Funktion und definiere

$$\begin{aligned} u : T &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\hat{u} \circ F^{-1})(x). \end{aligned}$$

Berechnen Sie ∇u mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 2: **6+3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $0 < \gamma \leq 1$. Dann ist durch

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

ist eine Norm auf $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, dem Raum der hölderstetigen Funktionen, definiert.

(a) Sei $a < b$. Beweisen Sie die Einbettung $W^{1,2}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}([a,b])$.

(b) Sind die folgenden Funktionen Elemente von $C^{0,\gamma}([0,1])$?

(i) $u(x) = |x|^\gamma$

(ii) $v(x) = \begin{cases} x^\gamma \sin \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $a \in [0, \infty)$ sowie $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) := a^{\frac{1}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - |x|^{\frac{p}{p-1}}\right) \qquad \forall x \in \Omega$$

eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -(|u'|^{p-2}u')' &= a \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist, das heißt $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |u'|^{p-2}u'\varphi' = \int_\Omega a\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Abgabe bis Mittwoch, den 22.5.13 um 14 Uhr