Numerik 2 — Blatt 3

Abgabe: Montag, den 13. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die Faltung $f * g$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ liegt und die schwache Ableitung nach x_j insbesondere durch $\partial_{x_j}(f * g) = (\partial_{x_j} f) * g$ gegeben ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} (-1)^k \Delta^k u = f & \text{in } \Omega \\ D^\alpha u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für alle $|\alpha| < k$. Hierbei ist $\Delta^k = \Delta(\cdots\Delta)$ (k-mal). Geben Sie die schwache Formulierung des Problems und zeigen Sie, dass dieses Problem für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Gehen Sie hierzu wie in der Vorlesung vor, indem Sie die Methode für die Poissongleichung auf das neue Problem übertragen.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es sei T ein nicht-entartetes Simplex in $\mathbb{R}^n$ sowie

$$\mathcal{P}_k(T) \equiv \left\{ p\colon T \longrightarrow \mathbb{R}\colon\ p(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha,\ c_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

der Raum der Polynome von Grad $\le k$ auf T und

$$\mathcal{G}_k(T) \equiv \left\{ x = \sum_{0 \le j \le n} \lambda_j a_j\colon\ \lambda_j \in \left\{ \frac{m}{k}\colon\ m = 0, \cdots, k \right\}, \lambda_j \ge 0, \sum_{0 \le j \le n} \lambda_j = 1 \right\}$$

ein Lagrangegitter k-ter Ordnung auf T. Zeigen Sie

$$\dim(\mathcal{P}_k(T)) = \dim(\mathcal{G}_k(T)) = \binom{n+k}{k}.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsdreieck und $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ seine baryzentrischen Koordinaten. Wie müssen die Knoten gewählt werden, damit sich die folgenden nodalen Basisfunktionen ergeben?

$$(a) \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^i(3\lambda^i - 1)(3\lambda^i - 2) - \frac{9}{2}\lambda^1\lambda^2\lambda^3, & i = 1,2,3 \\ \frac{9}{2}\lambda^i\lambda^j(3\lambda^i - 1) + \frac{27}{4}\lambda^1\lambda^2\lambda^3, & i \ne j \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^i(3\lambda^i - 1)(3\lambda^i - 2) & i = 1,2,3 \\ \frac{9}{2}\lambda^i\lambda^j(3\lambda^i - 1) & i \ne j \\ 27\lambda^1\lambda^2\lambda^3 \end{cases}$$