Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder 29.04.2013

Numerik 2 — Blatt 2

Abgabe: Montag, den 6. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Wir betrachten die Funktion $u(x) = \log|\log|x||$ auf dem Gebiet $\Omega = B_{1/e}(0) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,2}(\Omega)$, aber nicht jedoch $u \in C(\overline{\Omega})$ gilt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Wir notieren die Polynome von höchstem Grad k auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit $\mathcal{P}_k$.

(a) Zu jedem $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ mit

$$\int_\Omega D^\alpha u dx = \int_\Omega D^\alpha p dx$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m-1$.

(b) Ist F ein stetiges lineare Funktional auf $W^{m,p}(\Omega)$, welches $\langle F, u\rangle = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ erfüllt, so gilt

$$|\langle F, u\rangle| \leq C||D^m u||_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W^{m.p}(\Omega)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei T ein Simplex in $\mathbb{R}^n$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\, dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!}|T|.$$

Hierbei ist $\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$. Tipp, Zeigen Sie zunächst, dass für $p, q \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$