Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder 17.04.2013

# Numerik 2 — Blatt 1

Abgabe: Montag, den 29. April vor der Vorlesung

**Aufgabe 1:** **2+4 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Energie

$$E(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, \xi\rangle$$

einen Minimierer $z \in \mathbb{R}^n$ besitzt, der die Gleichung $Az = \xi$ löst.

(b) Beweisen Sie den Rieszschen Darstellungssatz: Sei $H$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $f \in H^*$ ein stetiges lineares Funktional auf $H$. Dann existiert genau ein $y \in H$ sodass für alle $x \in H$ gilt: $f(x) = \langle x, y\rangle$. Betrachten Sie hierzu das Funktional $J(x) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle - f(x)$ auf $H$ und gehen Sie wie in der Vorlesung vor.

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Wir betrachten das folgende *Neumann-Randwertproblem*: Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ der offene Einheitsball in $\mathbb{R}^2$ und $f(x) = x_1 + x_2 + 5$. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $u\colon B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{in } B_1(0) \\ \partial_\nu u(x) = x_1^4 + x_2^4 & \text{auf } \partial B_1(0) \end{cases}$$

wobei wir abkrzend $x = (x_1, x_2)$ setzen und $\partial_\nu u$ die Richtungsableitung nach der äußeren Normalen an $\partial B_1(0)$ ist. (Verwenden Sie hierzu den Integralsatz von Gauß.)

**Aufgabe 3:** **2 + 4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Zeigen Sie:

(a) Ist $u \in C(\overline{\Omega})$ und gilt $\int_\Omega |u(x)|dx = 0$, so gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$.

(b) Ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und gilt für alle $h \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x)h(x)dx = 0$$

so gilt $u = 0$ fast überall auf $\Omega$.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion $u(x) = |x|^s$ für reelle $s \in \mathbb{R}$ auf dem offenen Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Hierbei notiert $|\cdot|$ den euklidischen Betrag in $\mathbb{R}^n$.

(i) Sei $n = 1$ und $s > 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$Du(x) = \begin{cases} s|x|^{s-2}x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die schwache Ableitung der Funktion $u$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $u$ genau dann eine schwache Ableitung besitzt, falls

$$s + n > 1.$$