Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Franz Gmeineder, Hans Irl 12.6.2011

Numerik II — Blatt 9

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $f * g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit der Ableitung

$$\partial_j(f * g) = \partial_j f * g.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F(0) = 0$ und F' sei beschränkt. Sei weiter $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W_0^{1,p}(G)$. Zeigen Sie $v := F(u) \in W_0^{1,p}(G)$ und

$$\partial_i v = F'(u)\, \partial_i u, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tipp: Verwenden Sie glatte Aproximationen!

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Zeigen sie, dass $W^{1,2}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}((a,b))$. Beachten sie, dass durch

$$\sup_{x,y \in (a,b)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} + \|f\|_{L^\infty((a,b))}$$

eine Norm auf $C^{0,\frac{1}{2}}((a,b))$ definiert ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $B_1(0)$ der Einheitsball in $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $f(x) := \frac{x}{|x|}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $f \in W^{1,2}(B_1(0))$?