Prof. Diening, Schwarzacher, Gmeineder, Irl 05.06.2012

Fortgeschrittene numerische Mathematik — Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, den 13. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Riesz'scher Darstellungssatz) **4 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und sei $f \in \mathcal{H}^*$, d.h. $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ist ein lineares, stetiges Funktional. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutigen Minimierer $u \in H$ der Energie $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{J}(x) := \frac{1}{2}||x||^2 - f(x).$$

Zeigen Sie, dass der Minimierer u die Gleichung $(u, y) = f(y)$ für alle $y \in \mathcal{H}$ erfüllt.

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Eine Bilinearform $\sigma\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $m > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\sigma(x, y) \leq M\, ||x||\, ||y||$$

Hierbei bezeichne $||\cdot||$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm. Weiters heißt σ *koerziv*, falls es ein $M > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\sigma(x, x) \geq M\, ||x||^2$$

Zeigen Sie: Ist $\sigma\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine koerzive und beschränkte Bilinearform und $f \in \mathcal{H}'$, so existiert genau ein $u \in \mathcal{H}$, so dass für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\sigma(u, v) = f(v)$$

Folgern Sie mit Aufgabe 1, dass es somit genau einen stetigen linearen Operator $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\sigma(x, y) = \langle y, Tx\rangle$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to 0} \left\langle \frac{1}{h}(u(x + he_i) - u(x)) - \partial_{x_i} u(x), \varphi \right\rangle = 0,$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Dies bedeutet das Differenzenquotient im Distributionssinne gegen die Ableitung konvergiert.)

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (mit glattem Rand) und $f \in L^{p'}(\Omega)$. Hierbei sei p' der konjugierte Hölderexponent zu p, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeigen Sie: Jeder Minimierer $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Funktionals

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p - \langle f, Du\rangle$$

$$\mathcal{J}\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

erfüllt

$$\langle |Du|^{p-2}\, Du\,,\, D\varphi\rangle = \langle f\,, D\varphi\rangle$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.