Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, H. Irl 30.05.2012

Fortgeschrittene numerische Mathematik — Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, den 3. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **2+2+3=7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge. Wir definieren die γ-te Hölder Seminorm einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ via

$$[f]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \equiv \sup_{x,y\in\Omega \& x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

Der k, γ-te *Hölder Raum* $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ besteht aus allen Funktionen $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ sodass

$$||f||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \equiv$$

$$\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty$$

Hierbei sei $\gamma \geq 0$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) $||\cdot||_{C^{k,\gamma}}$ definiert eine Norm auf $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Diskutieren Sie, ob in der obigen Definition der Höldernorm $C\left(\overline{\Omega}\right)$ durch $C(\Omega)$ ersetzt werden kann.

(ii) $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ ist ein Banachraum in Bezug auf die gegebene Norm.

(iii) Nun sei $0 < \beta < \gamma \leq 1$. Dann gilt

$$||f||_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq ||f||_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \cdot ||f||_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

Diskutieren Sie, ob diese Ungleichung scharf ist.

Auf den nächsten Übungsblättern werden wir diese Aufgabe fortführen.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $B_{\frac{1}{e}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ der offene Ball um 0 mit Radius $\frac{1}{e}$ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie $\log|\log|x|| \in W^{1,2}\left(B_{\frac{1}{e}}(0)\right)$.

Aufgabe 3: **3+3+3=9 Punkte**

Sei $n \geq 3$. Wir betrachten die Funktion $\Psi\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Psi(x) = \frac{1}{n(n-2)\,\alpha(n)\,|x|^{n-2}}$$

Hierbei notieren wir mit $|\cdot|$ die *euklidische* Norm. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Zeigen Sie, für $x \neq 0$, dass

$$\sum_k \partial_k^2 \Psi(x) := \Delta\Psi(x) = 0.$$

(b) Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\varphi(x) = f^*\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x-y)\, f(y)\, dx$$

eine $C^2(\mathbb{R}^n)$-Funktion, die $-\Delta\varphi = f$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ erfüllt. Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Gauß auf dem Gebiet $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)$ und lassen Sie dann $\varepsilon \to 0$ gehen.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine C^2-Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heisst *harmonisch*, falls $\Delta\varphi = 0$ auf Ω. Zeigen Sie: Ist $\varphi \in C^2(\Omega)$ harmonisch auf Ω so gilt für jeden offenen Ball $B_r(x) \subset \Omega$

$$\varphi(x) = \operatorname{vol}(B_r(x))^{-1} \int\limits_{B_r(x)} \varphi \, dx.$$