Prof. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, H. Irl 23.05.2012

Numerik II — Blatt 6

Aufgabe 1: Stabilitätsfunktion und -gebiet — 5 Punkte

Bestimmen Sie für das Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b^T} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \\ \hline & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \tag{1.1}$$

die Stabilitätsfunktion $g(z)$ mit $z := \lambda h$, für welche

$$y_{n+1} = g(\lambda h) y_n \tag{1.2}$$

gilt.
Das Stabilitätsgebiet des Verfahrens ist zu

$$S := \{z \in \mathbb{C} | \, |g(z)| < 1\} \tag{1.3}$$

definiert.
Zeigen Sie, dass der offene Kreis um 1 mit Radius 1 im Stabilitätsgebiet S enthalten ist.

Aufgabe 2: Bedingungen an Koeffizienten — 2 Punkte

Gegeben sei das 3-stufige Runge-Kutta Verfahren von Heun

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b^T} \end{array} = \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}, \tag{2.1}$$

sowie folgende Tabelle, welche Ihnen angibt, welche Bedingungen die Koeffizienten zu erfüllen haben, damit das jeweilige Verfahren die entsprechende Ordnung besitzt:

Ordnung	Bedingungen
1	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i = 1$
2	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i = \frac{1}{2}$
3	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$
4	$\sum_{i=1}^{\nu} b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$ $\sum_{i,j=1}^{\nu} b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$ $\sum_{i,j,k=1}^{\nu} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$

(2.2)

Zeigen Sie, dass es sich um ein Verfahren 3. Ordnung handelt.

Aufgabe 3: A-Stabilität — 5 Punkte

Zeigen Sie, dass das durch

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b^T} \end{array} = \begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3-2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(3+2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegebene implizite Runge-Kutta Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 4: DG-Verfahren 1 — 4 Punkte

Prüfen Sie ob das Verfahren DG0, d.h.

$$u_k^- = u_{k-1}^- + \int_{I_k} f(t, u_k) dt,$$

invariant unter Autonomisierung ist.

Aufgabe 5: DG-Verfahren 2 **4 Punkte**

Berechnen sie den Verstärkungsfaktor von DG0 und DG1. Sind die Verfahren A-stabil? Begründen Sie ihre Annahme.