Numerik II — Blatt 5

Das *Impliziten Eulerverfahrens* (IE) ist defineirt durch

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1}, u_{j+1});$$

das *Trapezverfahrens* (TV) ist definiert durch

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1})).$$

Aufgabe 1: 4 Punkte

Stellen Sie die beiden Verfahren (IE) und (TV) in einem Bucher-Tableau dar.

Aufgabe 2: 4*2+4=12 Punkte

Wir betrachten das *Anfangswertproblem* (AWP)

$$\begin{aligned} u'(t) &= -2000(u(t) - \cos(t)) \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

und wollen dieses mit Hilfe des Impliziten Eulerverfahrens, bzw. des Trapezverfahrens (TV) numerisch näherungsweise lösen.

(a) Im Tutorium werden Sie die *Stabilitätsfunktion* $R_{IE}(z)$ des IEs bestimmen. Leiten Sie analog die *Stabilitätsfunktion* $R_{TV}(z)$ des TVs her, indem Sie das Verfahren auf die *Dahlquistsche Testgleichung* anwenden:

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u, \quad \text{Re } \lambda < 0 \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

(b) Im Tutorium werden Sie sehen, dass das *Stabilitätsgebiet* $S_{IE} = \{z || \frac{1}{1-z}| < 1\}$ des IEs die linke komplexe Halbebene

$$H_- = \{z \in \mathbb{C} | \text{Re } z < 0\}$$

umfasst, das Verfahren also *A-stabil* ist. Zeigen Sie, dass auch das TV *A-stabil* ist.

(c) Zeigen Sie, dass das IE sogar *L-stabil* ist. Das heißt, dass es *A-stabil* ist und

$$R(z) \to 0 \quad \text{für} \quad \text{Re } z \to -\infty.$$

Zeigen Sie außerdem, dass das TV nicht *L-stabil* ist.

(d) Bestimmen Sie die exakte Lösung der AWPs

(e) Auf der Homepage finden Sie die *Excel-Datei* IEundTV. Berechnen Sie mit Hilfe des TV und IE für die Schrittweiten $h = 2^{-5}, 2^{-4}$ für das oben stehende AWP je die numerische Näherungslösung. Beachten Sie hierbei, dass man nach Anwendung der beiden impliziten Verfahren auf das AWP analog zur Dahlquisten Testgleichung ohne weiteres explizit nach u_{t+1} auflösen kann. Sie haben es in diesem Fall also mit einer "harmlosen" impliziten Gleichung zu tun. Stellen Sie die beiden Näherungslösungen für gleiche Schrittweiten je in einem Diagramm dar.

(f) ZUSATZ: Sie können jeweils auch die exakte Lösung miteinbeziehen. Versuchen Sie die unterschiedliche Qualität der durch TV- bzw. IE gewonnenen Lösungen in Verbindung zur L-Stabilität zu bringen.

Aufgabe 3: Gronwall Lemma 4 Punkte

Es sei $w'(t) \leq aw(t)$ mit $a > 0$ für alle $t \in [0, d)$.

(a) Zeigen Sie für das Vergleichsproblem $v' = av$, $v(0) = w(0)$, dass

$$(v - w)(t)e^{-at}$$

in $[0, d)$ steigend ist.

(b) Folgern Sie daraus Gronwalls Lemma: $w(t) \leq w(0)e^{ta}$.