Prof. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, H. Irl 09.05.2012

Numerik II — Blatt 4

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein *s-stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren (RKV)* hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_{h,0} \\ t_{j+1} &:= t_j + h \\ u_{j+1} &:= u_j + h\varphi(t_j,\, u_j,\, h) \end{aligned}$$

mit jeweils $j = 0, 1, ..., m-1$, wobei die sogenannte *Verfahrensfunktion* φ mit Hilfe der sukzessiven Berechnung der Größen

$$\begin{aligned} v_1(t, u) &:= f(t,\, u) \\ v_2(t, u) &:= f(t + c_2 h,\, u + h a_{21} v_1(t, u)) \\ v_s(t, u) &:= f(t + c_s h,\, u + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} v_i(t, u)) \end{aligned}$$

durch

$$\varphi(t,\, u,\, h) := \sum_{i=1}^{s} b_i v_i(t, u)$$

definiert ist (Die v_j hängen auch noch von h ab). Dabei sind die Koeffizienten a_{ki}, b_i, c_i geeignet gewählte reelle Zahlen, die das Verfahren vollständig festlegen. Zur Beschreibung eines RKV ordnet man sie gewöhnlich nach dem sogenannten *Butcher-Tableau* an.

(a) Stellen Sie das verbesserte Eulerverfahren als RKV dar

(b) Stellen Sie die Koeffizienten in einem Butcher-Tableau dar.

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Bitte beachten Sie, dass Sie zur vollständigen Lösung der Aufgabe die *Excel-Datei* Uebung4 - Aufgabe 2 - Angabe.xls benötigen, die Sie auf unserer Hompage ganz unten finden. Wir betrachten das AWP:

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1.$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Sie sollen für die Schrittweiten $h = 2^{-1}$, ..., 2^{-5} (Spalte H, Zeile 4, 21, 38, ...) den jeweiligen Fehler (Spalte H, Zeile 16, 33, ...), sowie $-\log_2|\text{Fehler}|$ (Spalte H, Zeile 17, 34, ...) an der Stelle $t = 0.5$ bei Verwendung des klassischen RKV (für die Koeffizienten siehe RKV auf Wiki) gegenüber dem exakten Wert $u(0.5) = 2$ berechnen.

Im *Calculator* von OpenOffice können Sie unter *Extras* → *Optionen* → *OpenOffice.org Calc* → *Berechnen* einstellen, dass die *Genauigkeit wie angezeigt* berechnet werden soll. Stellen Sie für sämtliche Spalten die Zahlen auf *Wissenschaft* mit *Format-Code 0,0000000E+000*. Damit arbeiten wir in dieser Datei sozusagen mit einer Rechenanlage mit *achtstelliger Genauigkeit*.

(a) Implementieren Sie das Verfahrens für die Schrittweiten $h = 2^{-1}$, ..., 2^{-5} in die dafür vorgesehenen Masken. Berechnen Sie anschließend den Fehler bei der jeweiligen Schrittweite sowie dessen Abwandlungen in Spalte B von Zeile 18 bis 22. Erstellen Sie ein Diagramm mit x-Achse $-\log_2(h)$ und y-Achse $-\log_2(|\text{Fehler}|)$.

(b) Um den Fehler an der Stelle 0.5 beim verbesserten Eulerverfahren auf etwa 2^{-16} zu drücken benötigten Sie $h = 2^{-9}$. Beim klassischen RKV für einen Fehler von etwa 2^{-17} hingegen $h = 2^{-4}$. Wieviele Additionen, Multiplikationen und Auswertungen von f waren dafür jeweils nötig? Geben Sie jeweils allgemeine Formeln in Abhängigeit von $p := -\log_2 h$ an.

(c) Für Schrittweiten $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$, sollten die entsprechenden Punkte in etwa auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden und interpretieren Sie das Ergebnis.
Bemerkung: Falls Sie keine Werte zur verfügung haben können sie die Punkte $(2; 9,75E+0)$, $(3; 1,35E+1)$, $(4; 1,74E+1)$, $(5; 2,23E+1)$ verwenden.

Zur Form der Abgabe dieser Aufgabe: Die von Ihnen vervollständigte Excel-Datei ist nicht abzugeben. Bitte reichen Sie zu Teilaufgabe (a) die Spalten A bis K von Zeile 1 bis etwa 31 oder mehr auf eine DinA4 (Querformat) bei. Bei Fragen bzgl. Excel oder OpenOffice können Sie sich an www.google.de oder johann.b.irl@googlemail.com wenden.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Zweistufige explizite RKV haben die Form

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_{h,0} \\ t_{j+1} &:= t_j + h \\ v_1(t,u) &:= f(t,\, u) \\ v_2(t,u) &:= f(t+ch,\, u + av_1(t,u)) \\ \varphi(t,\, u,\, h) &:= b_1 v_1(t,u) + b_2 v_2(t,u) \\ u_{j+1} &:= u_j + h\varphi(t_j,\, u_j,\, h) \end{aligned}$$

(a) Betrachten Sie v_2 als eine auch von h abhängige Funktion. Entwickeln Sie v_2 um $h = 0$ mit Taylor, so dass sie etwa $v_2(h) = ... + O(h^2)$ stehen haben.

(b) Sei u die exakte Lösung. Entwickeln Sie die von h abhängige Funktion w mit

$$w(h) := u(t+h)$$

um $h = 0$ mit Taylor, so dass sie etwa $w(h) = ... + O(h^2)$ stehen haben.

(c) Berechnen Sie a, b_1, b_1 in Abhängigkeit von c, so dass der Diskretisierungsfehler

$$\tau_k^h := \frac{1}{h}(u(t_k) - u(t_{k-1})) - \varphi(t_{k-1},\, u(t_{k-1}),\, h) \in O(h^2).$$

(d) Erfüllen die Koeffizienten aus Aufgabe 1 die in (c) gefundenen Bedingungen?