

**Numerik II — Blatt 3****Aufgabe 1:****8 Punkte**

Es sei  $f \in C^0([0, 1] \times \mathbb{R})$ . Wir betrachten das (AWP):

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = u_0.$$

Weiters sei das Gitter  $I_h := \{0 = t_0, \dots, t_N = 1\}$ , wobei  $t_j := jh := \frac{j}{N}$ . Die approximierende Funktion  $u_h : I_h \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch das verbesserte Eulerverfahren definiert:

$$\begin{aligned} u_h(0) &:= v_0 := u_0, \quad \tilde{t}_j = t_j + \frac{h}{2}, \quad \tilde{v}_j := v_j + \frac{h}{2} f(t_j, v_j) \\ u_h(t_{j+1}) &:= v_{j+1} := v_j + h f(\tilde{t}_j, \tilde{v}_j). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konvergenzordnung 2 besitzt, d.h.

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u(t_i) - u_h(t_i)| = O(h^2).$$

**Aufgabe 2:****7 Punkte**

Bitte beachten Sie, zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe benötigen Sie die Excel-Datei Uebung3 - Aufgabe 2 - Angabe.xls welche auf unserer Homepage (ganz unten) zu finden ist. Wir betrachten das AWP:

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1.$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Sie sollen für die Schrittweiten  $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-10}$  (Zeile 4) den jeweiligen Fehler (Zeile 7), sowie  $-\log_2(|\text{Fehler}|)$  (Zeile 11) an der Stelle  $t = 0.5$  bei Verwendung des verbesserten Eulerverfahrens gegenüber dem exakten Wert  $u(0.5) = 2$  berechnen.

Im Calculator von OpenOffice können Sie unter *Extras*  $\rightarrow$  *Optionen*  $\rightarrow$  *OpenOffice.org Calc*  $\rightarrow$  *Berechnen* einstellen, dass die *Genauigkeit wie angezeigt* berechnet werden soll. Stellen Sie für sämtliche Spalten die Zahlen auf *Wissenschaft* mit *Format-Code 0,0000000E+000*. Damit arbeiten wir in dieser Datei sozusagen mit einer Rechenanlage mit achtstelliger Genauigkeit.

- (a) Im Tutorium 2 haben Sie das verbesserte Eulerverfahren kennengelernt. Verkürzen Sie den Pseudo Code (1.1) in die Form

$$v_0 := u_0, \quad v_{j+1} := \dots$$

- (b) Implementieren Sie in der Datei das verbesserte Eulerverfahren für die Schrittweiten  $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-10}$  (ab Zeile 30, Spalte B bis K). Berechnen Sie anschließend den Fehler bei der jeweiligen Schrittweite in Zeile 7 sowie dessen Abwandlungen in Zeile 9 und 11. Erstellen Sie ein Diagramm mit x-Achse  $-\log_2(\text{Schrittweite})$  und y-Achse  $-\log_2(|\text{Fehler an Stelle } 0.5|)$ .

**Zusatzaufgabe: (+2P)**

Für Schrittweiten  $h = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ , sollten die entsprechenden Punkte im Diagramm in etwa auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden (Siehe dazu Numerik 1: Gaußsche Ausgleichgerade) und Interpretieren Sie das Ergebnis.

Bemerkung: Falls Sie keine Werte zur Verfügung haben können sie die Punkte  $(4; 6, 65E + 0)$ ,  $(5; 8, 53E + 0)$ ,  $(6; 1, 05E + 1)$ ,  $(7; 1, 24E + 1)$  verwenden.

**Zur Form der Abgabe dieser Aufgabe:** Die von Ihnen vervollständigte Excel-Datei ist nicht abzugeben. Bitte reichen Sie zu Teilaufgabe (b) die Spalten A bis K von Zeile 1 bis etwa 31 oder mehr auf eine DinA4 (Querformat) bei. Bei Fragen bzgl. Excel oder OpenOffice können Sie sich an [www.google.de](http://www.google.de) oder [johann.b.irl@googlemail.com](mailto:johann.b.irl@googlemail.com) wenden.

Sie werden zu dieser Datei in den nächsten Wochen nochmals eine Aufgabe gestellt bekommen. Speichern Sie die Datei unter anderem aus diesem Grund vorübergehend.

**Aufgabe 3:****5 Punkte**

Sei  $A$  eine reelle symmetrische  $n \times n$ -Matrix. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}u' &= Au \\ u(t_0) &= u_0 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

in Abhängigkeit der Anfangswertparameter  $t_0, u_0$  sowie der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$ .

*Hinweis:* Da  $A$  symmetrisch ist, existiert eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus Eigenvektoren der Matrix  $A$ . Bestehen die Spalten der Matrix  $S$  aus diesen, so hat  $D := S^t A S$  Diagonalgestalt.