Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, H. Irl 25.04.2012

Numerik 2 — Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, den 2. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung $x' = g\left(at + bx\left(t\right) + c\right)$, durch geeignete Substitution, in eine autonome Differentialgeichung transformieren lässt. Wenden Sie diese Methode an, um eine Lösung der Differentialgleichung

$$x'\left(t\right) = 1 - \frac{1}{\cos\left(x\left(t\right) - t + \pi/2\right)}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2: **2+2+2=6 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingung $x\left(1\right) = 0$:

(a) $x'\left(t\right) = 1 + \frac{x(t)}{t} + \frac{x(t)^2}{t^2}$

(b) $x'\left(t\right) = \left(t + x\left(t\right) - 1\right)^2$

(c) $x'\left(t\right) = x/t + \sqrt{1 - \left(x\left(t\right)/t\right)^2}$

Aufgabe 3: **2+5 Punkte**

Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben.
Wir betrachten das AWP

$$x'\left(t\right) = f\left(t\right)x\left(t\right), \; x\left(t_0\right) = x_0.$$

(a) Geben Sie eine explizite Lösungsformel an.

(b) Die k-te Picard-Iterierte des Anfangswertproblems $x'\left(t\right) = f\left(t\right)x\left(t\right)$, $x\left(t_0\right) = x_0$ hat die Form

$$u_k = x_0 \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left(\int_{t_0}^{t} f\left(\tau\right)\, d\tau \right)^j$$

für $k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, u_k konvergiert gegen die Lösung des AWP.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Definiere die folgenden Abbildungen $\delta_0, J_p\colon \left(C\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}\right); \mathbb{R}\right)$ für $p \geq 1$:

$$\delta_0\left(f\right) = f\left(0\right), \quad J_p\left(f\right) = \int_0^1 \left|f\left(x\right)\right|^p dx$$

Zeigen Sie, dass δ_0 und J_1 Lipschitz-stetig sind. Weisen Sie nach, dass J_p für $p > 1$ stetig ist, allerdings nicht Lipschitz-stetig.