Prof. Diening, Schwarzacher, Gmeineder, Irl 05.06.2012

Fortgeschrittene numerische Mathematik — Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, den 13. Juni vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^\infty(\Omega)$ gilt:

(a) $\|f\|_\infty = \sup_{g \in L^1(\Omega)\,:\,\|g\|_1 \leq 1} \int fg\,dx$.

Diese Aussage ist insofern erstaunlich, da $(L^\infty)^* \neq L^1$.

(b) $\|f\|_\infty = \sup_{g \in C_0^\infty(\Omega)\,:\,\|g\|_1 \leq 1} \int fg\,dx$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es eine Folge $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit

(a) $f_n \to f$ fast überall

(b) $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$.

Tipp: Nutzen Sie Glättung.
Achtung: Es gilt nicht $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega)$, da sonst f stetig wäre.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei B ein Ball und $u \in W^{1,\infty}(B)$. Konstruieren wie in Lemma 5.38 in der Vorlesung durch Streckung und Glättung, dass es $u_n \in W^{1,\infty}(B)$ gibt mit

(a) $u_n \in C^\infty(\overline{B})$,

(b) $u_n \to u$ fast überall in B,

(c) $\partial_j u_n \to \partial_j u$ fast überall in B für $j = 1, \dots, n$,

(d) $\|u_n\|_\infty \to \|u\|_\infty$,

(e) $\|\partial_j u_n\|_\infty \to \|\partial_j u\|_\infty$ für $j = 1, \dots, n$.

Tipp: Nutzen Sie die Ideen aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei B ein Ball. Zeigen Sie für alle $u \in W^{1,\infty}(B)$, dass

$$\|u - (u)_B\|_\infty \leq c\,\mathrm{diam}(B)\|\nabla u\|_\infty.$$

Tipp: Nutzen Sie Aufgabe 3.