Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Franz Gmeineder, Hans Irl 19.6.2011

Numerik II — Blatt 10

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in W_0^{1,2}(G)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u \leq 0$, d.h.

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(G)$ mit $\varphi \geq 0$. Zeigen Sie, dass $u \leq 0$ fast überall in G.
Tipp: Benutzen Sie $\varphi = u^+ := u \, \chi_{\{u>0\}} \in W_0^{1,2}(G)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei T ein Simplex in $\mathbb{R}^n$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x) \, dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!} |T|.$$

Hierbei ist $\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$. Tipp, Zeigen Sie zunächst, dass für $p, q \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei B ein Ball im $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^p(B)$. Zeigen Sie, dass

$$⨍_B |f - \langle f \rangle_B|^p \, dx \leq 2^p \inf_{a \in \mathbb{R}} ⨍_B |f - a|^p \, dx,$$

wobei

$$\langle f \rangle_B = ⨍_B f \, dx = |B|^{-1} \int_B f \, dx.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, d.h. im Dualraum von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\langle \psi * f, \varphi \rangle := \langle f, \overline{\psi} * \varphi \rangle \text{ für alle } \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\overline{\psi}(x) := \psi(-x)$. Zeigen Sie, dass δ_0 ein Einselement ist; genauer, zeigen Sie $\langle \psi * \delta_0, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.