Prof. Dr. L. Diening, S. Schwarzacher, F. Gmeineder, H. Irl 18.04.2012

Fortgeschrittene numerische Mathematik — Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, den 25. April vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $x'(t) = 1 - x(t) + t,\ x(t_0) = x_0$ mit den Anfangsbedingungen $t_0 \geq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) $x'(t) - x^2(t) = 1,\ x(0) = 0$

(c) $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$ mit $a > 0$, $b \geq 0$ und der Anfangsbedingung $x(0) = c \geq 0$. Begründen Sie, warum diese Differentialgleichung die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Population modelliert und interpretieren Sie den Grenzübergang für $t \to \infty$.

Aufgabe 2: Picard-Lindelöf **2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte**

Sei $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ mit $(t_0, x_0) \in D$ und $0 \leq t_0 \in I \equiv [t_0, a]$. Zeigen Sie das Folgende:

(a) Eine stetige Funktion $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig differenzierbare Lösung des Anfangwertproblems für $t \in I$, wenn sie Fixpunkt des Operators

$$T\colon C([t_0,a], \mathbb{R}^n) \to C([t_0,a], \mathbb{R}^n), \quad T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

ist.

(b) Sei nun explizit $I \equiv [t_0, a]$ mit $a > t_0$. Durch die Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ wird $C([t_0,a], \mathbb{R}^n)$ zu einem normierten Raum. Zeigen Sie, dass für jedes $L > 0$ durch

$$||x|| \equiv \max_{t \in [t_0,a]} |x(t)|\, e^{-2L(t-t_0)}$$

eine zu $||\cdot||_\infty$ äquivalente Norm definiert wird.

(c) Sei $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine bezüglich x Lipschitz-stetige Funktion. Nützen Sie die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben, um zu zeigen: Es existiert eine eindeutige Lösung $x \in C([t_0,a], \mathbb{R}^n)$ des obigen Anfangswertproblems. (Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass T eine Kontraktion bez. $||\cdot||$ ist.)

(d) Würde es auch genügen zu zeigen, dass T^m für ein $m \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion bzgl. $||\cdot||$ ist, um die gewünschte Existenz- und Eindeutigkeitsaussage aus Teilaufgabe (c) zu erhalten? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon K \to \mathbb{R}$, die gleichmässig beschränkt sei, d.h.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty < c_1.$$

Ferner gelte

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in K,\, x\neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{||x-y||^\gamma} < c_2$$

für ein $\gamma > 0$ und $c_1, c_2 > 0$ fest. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $C(K,\mathbb{R})$ gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= y^2 - x^2 \\ y' &= xy. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie das zugehörige Richtungsfeld und Phasenporträt.