# Existenz p-Navier-Stokes

Thomas Schwarz

Hüttenseminar

# Problemstellung

Gesucht ist eine Lösung für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und die Druckverteilung $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ der

## p-Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(|\nabla \mathbf{v}|^{p-2}\nabla \mathbf{v}\right) + [\nabla \mathbf{v}]\mathbf{v} + \nabla \pi &= \mathbf{f} && \text{auf } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 && \text{auf } \Omega, \\ \mathbf{v} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

- $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ äußere Kraft
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt mit Lipschitz-stetigem Rand
- $p > 1$

# Vorgehensweise

Beweis nicht mittels

- Fourier-Transformation
- äquivalentes Minimierungsproblem

Sondern: Suchen einer schwachen Lösung

$$X := \{\mathbf{v} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^3 | \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

mit Norm $\|\mathbf{v}\|_X := \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^{3\times 3}}$
(äquivalent zur Sobolev-Norm)
$\Rightarrow X$ ist reflexiver separabler Banachraum

# Schwache Formulierung

Man wählt $\int_\Omega \pi dx = 0$ und definiert:

$$\begin{aligned}
\langle A_1\mathbf{v}, \varphi\rangle &:= \int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^{p-2}\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi dx \\
\langle A_2\mathbf{v}, \varphi\rangle &:= \int_\Omega [\nabla\mathbf{v}]\mathbf{v}\cdot\varphi dx \\
\langle A_3\mathbf{v}, \varphi\rangle &:= \int_\Omega \nabla\pi\cdot\varphi dx = -\int_\Omega \pi \operatorname{div}\varphi dx = 0 \\
\langle b, \varphi\rangle &:= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\varphi dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A_1 + A_2)v = b$$

$A_1$: monoton; $A_2$: stark stetig

# Definitionen (1/2)

Sei $X$ ein reflexiver reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator

## Definition Pseudomonotonie

$A$ heißt pseudomonoton, falls aus

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X \quad \text{und}$$
$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \leq 0$$

folgt, dass $\forall w \in X$ gilt:

$$\langle Au, u - w\rangle_X \leq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X$$

# Definitionen (2/2)

## Definition Bedingung (M)

$A$ genügt der Bedingung (M), falls aus

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \\ &Au_n \rightharpoonup b \quad \text{in } X^* \quad \text{und} \\ &\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle_X \leq \langle b, u \rangle_X \end{aligned}$$

folgt, dass $Au = b$ gilt

## Lemma

1. $A$ pseudomonoton und lokal beschränkt $\Rightarrow$ $A$ demistetig
2. $A$ pseudomonoton $\Rightarrow$ $A$ genügt Bedingung (M)
3. $A$ stark stetig $\Rightarrow$ $A$ pseudomonoton
4. $A$ und $B$ pseudomonoton $\Rightarrow$ $A + B$ pseudomonoton
5. $A$ monoton und hemistetig $\Rightarrow$ $A$ pseudomonoton

# Verallgemeinerung des Satzes von Browder und Minty

## Satz von Brezis

Sei $A : X \to X^*$ pseudomonoton, beschränkt und koerziv.
Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von

$$Au = b$$

Beweis: Sei $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis von X; $X_n := \text{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$
Approximative Lösungen: Galerkin-System

$$\langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

lösen mit $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k$

1. Lösbarkeit: (1) $=>$ $A$ demistetig $\Rightarrow \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig
   $(g_k(\mathbf{c}^n) := \langle Au_n, w_k \rangle, k = 1, \ldots, n)$
   Koerzivität von $A \Rightarrow \exists R_0 > 0$ und (Fixpunktargument)
   $\exists$ Lösungen $u_n$ mit $\|u_n\|_X \leq R_0$

# Fortsetzung Beweis

$\langle Au_n - b, w_k \rangle = 0 \quad k = 1, \ldots, n$

2. Konvergenz: $\exists$ schwach konvergente Teilfolge $u_{n_k} \rightharpoonup u$
   $\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in \operatorname{span}\{w_1, \ldots\}$
3. Beschränktheit von $(Au_{n_k})$: $A$ beschränkt
   $Au_{n_k} \rightharpoonup c \quad \text{in } X^* \qquad \text{und } b = c$
4. $\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle b, u_{n_k} \rangle \to \langle b, u \rangle$
5. (2) $\Rightarrow$ $A$ genügt Bedingung (M)

$$\Rightarrow Au = b$$

# Anwendung auf p-Navier-Stokes

## Lemma

- $A_1$ ist beschränkt, strikt monoton, koerziv und stetig
- Für $p > \frac{9}{5}$ ist $A_2$ beschränkt und stark stetig

## Einbettungssatz für Sobolev-Räume

Für $1 - \frac{3}{p} > -\frac{3}{q}$ gilt: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ kompakt
Insbesondere: $\|u\|_{L^q} \leq c\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

Beweis des Lemmas: $a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\, dx$ trilinear
Beschränktheit:
$|a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q \|\mathbf{w}\|_q \leq c\|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}\|_X \|\mathbf{w}\|_X \quad$ für $p > \frac{9}{5}$

Starke Stetigkeit: Wegen $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ folgt $a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -a_2(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$
Seien $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$. Dann $|a_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}) - a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq$
$|a_2(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}, \mathbf{v}_n, \mathbf{w})| + |a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}, \mathbf{w})| =$
$|-a_2(\mathbf{w}, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u})| + |a_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}, \mathbf{w})| \to 0$

**Lemma**

$A_1 + A_2$ ist koerziv

Beweis: Sei $\mathbf{u} \in X$
Da $A_1$ koerziv ist und $\langle A_2 \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = a_2(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$
ist $A_1 + A_2$ koerziv.

# Ergebnis

**Satz**

Für $p > \frac{9}{5}$ gibt es zu jedem $\mathbf{f} \in (L^{p'}(\Omega))^3$ ein $\mathbf{u} \in X$,
so dass $\mathbf{u}$ die p-Navier-Stokes-Gleichungen löst

# Existenz des Drucks

Der Satz von De Rham angewandt auf

$$\langle \mathbf{F}, \varphi \rangle := \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^{p-2} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} \cdot \varphi dx - \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \varphi = 0$$

ergibt: $\exists \pi \in L^p(\Omega)$ mit $\int_\Omega \pi dx = 0$, so dass $\forall \boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^3$ gilt:

$$\langle \mathbf{F}, \varphi \rangle = \int_\Omega \pi \operatorname{div} \varphi dx$$