Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 11.07.2011

Numerik II — Blatt 9

Dieses Blatt hat den Wert von 20 Punkten; bis zu 10 Zusatzpunkten können daher erlangt werden.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $f * g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit der Ableitung

$$\partial_j(f * g) = \partial_j f * g.$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F(0) = 0$ und F' sei beschränkt. Sei weiter $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W_0^{1,p}(G)$.

(a) Zeigen Sie $v := F(u) \in W_0^{1,p}(G)$ und

$$\partial_i v = F'(u)\, \partial_i u, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Zeigen Sie, dass $|u|, u_+, u_- \in W_0^{1,p}(G)$, wobei $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$ und $u_- = \min\{u(x), 0)\}$ für $x \in G$.

Tipp für (a) und (b): Verwenden Sie glatte Aproximationen!

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in W_0^{1,2}(G)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u \leq 0$, d.h.

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \leq 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(G)$ mit $\varphi \geq 0$. Zeigen Sie, dass $u \leq 0$ fast überall in G.
Tipp: Benutzen Sie $\varphi = u^+ := u\, \chi_{\{u>0\}}$. Zeigen Sie, $\nabla u^+ = \nabla u\, \chi_{\{u>0\}}$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei T ein Simplex in $\mathbb{R}^n$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\, dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!} |T|.$$

Hierbei ist $\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$. Tipp, Zeigen Sie zunächst, dass für $p, q \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Es sei $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, d.h. im Dualraum von $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\langle \psi * f, \varphi \rangle := \langle f, \overline{\psi} * \varphi \rangle \text{ für alle } \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\overline{\psi}(x) := \psi(-x)$. Zeigen Sie, dass δ_0 ein Einselement ist; genauer, zeigen Sie $\langle \psi * \delta_0, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.