Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 5.7.2011

Numerik II — Blatt 8

Es sei $p \geq 2$ und G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Es sei $f \in L^{p'}(G)$. Wir betrachten $J : W_0^{1,p}(G) \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \langle f, \nabla u\rangle.$$

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $d = \inf_{u \in W_0^{1,p}} J(u)$. Zeigen Sie, dass $-\infty < d < \infty$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeigen Sie die *Clarksonsche Ungleichung:*

$$\|(f+g)/2\|_p^p + \|(f-g)/2\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst die Ungleichung $x^p + y^p \leq (x^2 + y^2)^{p/2}$ für positive x, y. Betrachten Sie dazu die Funktion $h(x) = (1 + x^2)^{p/2} - x^p - 1$. Verwenden Sie schlussendlich die Konvexität von $x \mapsto x^{p/2}$; da $p \geq 2$ ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Beweisen Sie, die eindeutige Existenz von Minimierern von J.
Zeigen Sie dafür, dass eine Minimalfolge $u_l : J(u_l) \to d$ mit $l \to \infty$ eine Cauchyfolge in $W_0^{1,p}$ ist. Tipp: Argumentieren Sie analog zu dem entsprechenden Beweis für den Laplaceoperator aus der Vorlesung; verwenden Sie dazu auch die Clarksonsche Ungleichung.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei T ein nicht entartetes Dreieck im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\dim P_k(T) = \binom{n+k}{n}$.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Es sei B ein Ball im $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^p(B)$. Zeigen Sie, dass

$$\fint_B |f - \langle f\rangle_B|^p \, dx \leq 2^p \inf_{a \in \mathbb{R}} \fint_B |f - a|^p \, dx,$$

wobei

$$\langle f\rangle_B = \fint_B f \, dx = |B|^{-1} \int_B f \, dx.$$