Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 29.6.2011

Numerik II — Blatt 7

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Zeigen sie, dass jedes Minimum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ von dem Funktional

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \langle f, \nabla u \rangle,$$

die Gleichung

$$\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle = \langle f, \nabla\varphi\rangle$$

erfüllt; für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in W_0^{k,1}(\Omega)$. Zeigen sie, dass für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|+|\beta| \leq k$ die schwachen Ableitungen $D^\alpha(D^\beta(f))$ und $D^{\alpha+\beta}(f)$ gleich sind.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Zeigen sie, dass $W^{1,2}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\frac{1}{2}}((a,b))$. Beachten sie, dass durch

$$\sup_{x,y\in(a,b)} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} + \|f\|_{L^\infty((a,b))}$$

eine Norm auf $C^{0,\frac{1}{2}}((a,b))$ definiert ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $B_{\frac{1}{e}}(0) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen sie, dass $\log|\log|x|| \in W^{1,2}(B_{\frac{1}{e}}(0))$ ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Es sei $B_1(0)$ der Einheitsball in $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $f(x) := \frac{x}{|x|}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $f \in W^{1,2}(B_1(0))$?

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Es sei $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \frac{1}{h}(u(x+he_i) - u(x)) - \partial_{x_i}u(x), \varphi\right\rangle = 0,$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Sei $\widehat{T}$ der Einheitssimplex im $\mathbb{R}^n$ und sei $T = \operatorname{conv}(\{a_0, a_1, \dots, a_n\})$ ein n-Simplex. Zeigen Sie, dass es genau eine affin-lineare Abbildung $F : \widehat{T} \to T$ gibt mit $F(e_i) = a_i$ für $i = 0, \dots, n$. (Die Existenz wurde in der Vorlesung gezeigt. Es geht hier um die Eindeutigkeit.)