

**Numerik II — Blatt 6****Aufgabe 1:****5 Punkte**

Zeigen Sie, dass das durch

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline \mathbf{b}^T & \end{array} = \frac{\frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})}{\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})} \left| \begin{array}{c|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{12}(3 - 2\sqrt{3}) \\ \hline \frac{1}{12}(3 + 2\sqrt{3}) & \frac{1}{4} \end{array} \right| \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

gegebene implizite Runge-Kutta-Verfahren A-stabil ist.

**Aufgabe 2:****5 Punkte**Für  $\theta \in [0, 1]$  betrachte man das Verfahren

$$u_{n+1} = u_n + h(\theta f(t_n, u_n) + (1 - \theta)f(t_{n+1}, u_{n+1})).$$

- (a) Welche Verfahren ergeben sich für  $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ ?
- (b) Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet in Abhängigkeit von  $\theta$ . Für welche  $\theta$  ist obiges Verfahren A-stabil?

**Aufgabe 3:****5 Punkte**Es sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , so dass  $f \equiv 0$  außerhalb von  $[0, L] \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx;$$

bestimmen Sie die Abhängigkeit der Konstante  $c$  von  $L$ .