Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 7.6.2011

Numerik II — Blatt 5

Aufgabe 1: 4 Punkte

(a) Sei $f(t) = |t|^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat f eine schwache Ableitung auf $(-1,1)$? Geben Sie f' an.

(b) Sei $f(t) = |t|$. Berechnen sie die zweite distributionelle Ableitung f'' also $(f')'$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass es kein $f \in C^0((-1,1))$ gibt, so dass

$$\varphi(0) = \int_{-1}^{1} f(t)\varphi(t)\,dt$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty((-1,1))$. (Hinweis: Benutzen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung.)

Aufgabe 3: 12 Punkte

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = -2000(u(t) - \cos t),\ u(0) = 0 \tag{3.1}$$

und wollen diese mit dem impliziten Eulerverfahren (IE)

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_{j+1},\, u_{j+1})$$

sowie dem Trapezverfahren (TV)

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h}{2}(f(t_j,\, u_j) + f(t_{j+1},\, u_{j+1}))$$

näherungsweise lösen.

(a) Im Tutorium haben Sie die Stabilitätsfunktion $R(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für das IE bestimmt. Leiten Sie analog die Stabilitätsfunktion $R(z)$ für das TV her, indem Sie das Verfahren auf die Dahlquistsche Testgleichung anwenden:

$$u' = \lambda u,\ u(t_0) = u_0 \text{ wobei } \mathrm{Re}\lambda < 0,$$

(b) Im Tutorium haben Sie bereits gesehen, dass das Stabilitätsgebiet des IE $S = \{z : \left|\frac{1}{1-z}\right| < 1\}$ die linke komplexe Halbebene

$$H_- = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re} z < 0\}$$

umfasst, das Verfahren also A-stabil ist. Zeigen Sie, dass auch das TV A-stabil ist.

(c) Zeigen Sie, dass das IE sogar L-stabil ist. Das heißt, dass es A-stabil ist und

$$R(z) \to 0 \text{ für } \mathrm{Re} z \to -\infty$$

Zeigen Sie außerdem, dass das TV nicht L-stabil ist.

(d) Bestimmen Sie die exakte Lösung des AWP (3.1).

(e) Auf der Homepage finden Sie die Excel-Datei “Aufgabe 3”. Berechnen Sie mit Hilfe des TV und IE die Nährungslösung für (3.1). Verwenden Sie dafür die Schrittweiten $h = 2^{-5}$ und 2^{-4}. Stellen Sie die beiden Näherungslösungen, für gleiche Schrittweiten in einem Diagramm zum Vergleich; auf dem Intervall $[0, 1]$. ZUSATZ: Sie können auch die exakte Lösung miteinbeziehen. Versuchen Sie die unterschiedliche Qualität der durch TV- bzw. IE gewonnenen Lösungen in Verbindung zur L-Stabilität zu bringen.