

Numerik II — Blatt 4

Explizite Runge-Kutta-Verfahren sind wie folgt definiert:

Sei $s \in \mathbb{N}$. Ein explizites s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren (R-K-V) hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u_0 &:= u_{h,0} \\ t_{j+1} &:= t_j + h \\ u_{j+1} &:= u_j + h\varphi(t_j, u_j, h) \end{aligned}$$

mit jeweils $j = 0, 1, \dots, m-1$, wobei die sogenannte Verfahrensfunktion φ mit Hilfe der sukzessiven Berechnung der Größen

$$\begin{aligned} v_1(t, u) &:= f(t, u) \\ v_2(t, u) &:= f(t + c_2h, u + ha_{21}v_1(t, u)) \\ v_s(t, u) &:= f(t + c_sh, u + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si}v_i(t, u)) \end{aligned}$$

durch

$$\varphi(t, u, h) := \sum_{i=1}^s b_i v_i(t, u)$$

definiert ist (Die v_j hängen auch noch von h ab). Dabei sind die a_{ki} , b_i , c_i geeignet gewählte reelle Zahlen, die das Verfahren vollständig festlegen. Zur Beschreibung eines Runge-Kutta-Verfahrens ordnet man sie gewöhnlich nach dem sogenannten Butcher-Tableau an.

Aufgabe 1:**3 Punkte**

Versuchen Sie das verbesserte Eulerverfahren als Runge-Kutta-Verfahren zu schreiben. Stellen Sie die Koeffizienten in einem Butcher-Tableau dar.

Aufgabe 2:**6 Punkte**

Wir betrachten das explizite 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren ($s=2$):

- Betrachten Sie $\tilde{v}_2(h) = f(t+c_2h, u+ha_{21}v_1(t, u))$ als eine von h abhängige Funktion; weiters sei $\tilde{u}(h) := u(t+h)$. Entwickeln Sie das Taylorpolynom erster Ordnung von $\tilde{v}_2$ und $\tilde{u}$ an der Stelle $h = 0$.
- Wählen Sie geeignete a_{21} , b_1 , b_2 in Abhängigkeit von c , so dass der Diskretisierungsfehler

$$\tau_k^h := \frac{1}{h}(u(t_k) - u(t_{k-1})) - \varphi(t_{k-1}, u(t_{k-1}), h) \text{ in } O(h^2) \text{ ist.}$$

- Erfüllen die Koeffizienten aus Aufgabe 1 die in (c) gefundenen Bedingungen?

Aufgabe 3:**7 Punkte**

Bitte beachten Sie, zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe benötigen Sie die Excel-Datei Uebung4 - Aufgabe 2 - Angabe.xls welche auf unserer Homepage (ganz unten) zu finden ist. Wir betrachten das AWP:

$$u' = u^2, u(0) = 1.$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Sie sollen für die Schrittweiten $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-5}$ (Spalte H, Zeile 4, 21, 38, ...) den jeweiligen Fehler (Spalte H, Zeile 16, 33, ...), sowie $-\log_2(|\text{Fehler}|)$ (Spalte

H, Zeile 17, 34, ...) an der Stelle $t = 0.5$ bei Verwendung des klassischen R-K-V gegenüber dem exakten Wert $u(0.5) = 2$ berechnen. Für die Koeffizienten siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren#Beispiele>. Im Calculator von OpenOffice können Sie unter *Extras* → *Optionen* → *OpenOffice.org Calc* → *Berechnen* einstellen, dass die *Genauigkeit wie angezeigt* berechnet werden soll. Stellen Sie für sämtliche Spalten die Zahlen auf *Wissenschaft* mit *Format-Code* $0,0000000E+000$. Damit arbeiten wir in dieser Datei sozusagen mit einer Rechenanlage mit achttelliger Genauigkeit.

- (a) Implementieren Sie das Verfahren für die Schrittweiten $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-5}$ in die dafür vorgesehenen Masken. Berechnen Sie anschließend den Fehler bei der jeweiligen Schrittweite sowie dessen Abwandlungen in Spalte B von Zeile 18 bis 22. Erstellen Sie ein Diagramm mit x-Achse $-\log_2(h)$ und y-Achse $-\log_2(|\text{Fehler}|)$.
- (b) Um den Fehler an der Stelle 0.5 beim verbesserten Eulerverfahren auf etwa 2^{-16} zu drücken benötigten Sie $h = 2^{-9}$. Beim klassischen R-K-V für einen Fehler von etwa 2^{-17} hingegen $h = 2^{-4}$. Wieviele Additionen, Multiplikationen und Auswertungen von f waren dafür jeweils nötig? Geben Sie jeweils allgemeine Formeln in Abhängigkeit von $p := -\log_2 h$ an.
- (c) Für Schrittweiten $h = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$, sollten die entsprechenden Punkte in etwa auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden und interpretieren Sie das Ergebnis.
Bemerkung: Falls Sie keine Werte zur Verfügung haben können Sie die Punkte $(2; 9,75E + 0)$, $(3; 1,35E + 1)$, $(4; 1,74E + 1)$, $(5; 2,23E + 1)$ verwenden.

Zur Form der Abgabe dieser Aufgabe: Die von Ihnen vervollständigte Excel-Datei ist nicht abzugeben. Bitte reichen Sie zu Teilaufgabe (a) die Spalten A bis K von Zeile 1 bis etwa 31 oder mehr auf eine DinA4 (Querformat) bei. Bei Fragen bzgl. Excel oder OpenOffice können Sie sich an www.google.de oder johann.b.irl@googlegmail.com wenden.

Sie werden zu dieser Datei in den nächsten Wochen nochmals eine Aufgabe gestellt bekommen. Speichern Sie die Datei unter anderem aus diesem Grund vorübergehend.

Aufgabe 4: Gronwall Lemma

4 Punkte

Es sei $w'(t) \leq aw(t)$ mit $a > 0$ für alle $t \in [0, d)$.

- (a) Zeigen Sie für das Vergleichsproblem $v' = av$, $v(0) = w(0)$, dass

$$(v - w)(t)e^{-at}$$

in $[0, d)$ steigend ist.

- (b) Folgern Sie daraus Gronwalls Lemma: $w(t) \leq w(0)e^{ta}$.