

Numerik II — Blatt 3**Aufgabe 1:****8 Punkte**

Es sei $f \in C^0([0, 1] \times \mathbb{R})$. Wir betrachten das (AWP):

$$u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = u_0.$$

Weiters sei das Gitter $I_h := \{0 = t_0, \dots, t_N = 1\}$, wobei $t_j := jh := \frac{j}{N}$. Die approximierende Funktion $u_h : I_h \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch das verbesserte Eulerverfahren definiert:

$$\begin{aligned} u_h(0) &:= v_0 := u_0, \quad \tilde{t}_j = t_j + \frac{h}{2}, \quad \tilde{v}_j := v_j + \frac{h}{2} f(t_j, v_j) \\ u_h(t_{j+1}) &:= v_{j+1} := v_j + h f(\tilde{t}_j, \tilde{v}_j). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren die Konvergenzordnung 2 besitzt, d.h.

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u(t_i) - u_h(t_i)| = O(h^2).$$

Aufgabe 2:**7 Punkte**

Bitte beachten Sie, zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe benötigen Sie die Excel-Datei Uebung3 - Aufgabe 2 - Angabe.xls welche auf unserer Homepage (ganz unten) zu finden ist. Wir betrachten das AWP:

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1.$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Sie sollen für die Schrittweiten $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-10}$ (Zeile 4) den jeweiligen Fehler (Zeile 7), sowie $-\log_2(|\text{Fehler}|)$ (Zeile 11) an der Stelle $t = 0.5$ bei Verwendung des verbesserten Eulerverfahrens gegenüber dem exakten Wert $u(0.5) = 2$ berechnen.

Im Calculator von OpenOffice können Sie unter *Extras* \rightarrow *Optionen* \rightarrow *OpenOffice.org Calc* \rightarrow *Berechnen* einstellen, dass die *Genauigkeit wie angezeigt* berechnet werden soll. Stellen Sie für sämtliche Spalten die Zahlen auf *Wissenschaft* mit *Format-Code 0,0000000E+000*. Damit arbeiten wir in dieser Datei sozusagen mit einer Rechenanlage mit achtstelliger Genauigkeit.

- (a) Im Tutorium 2 haben Sie das verbesserte Eulerverfahren kennengelernt. Verkürzen Sie den Pseudo Code (1.1) in die Form

$$v_0 := u_0, \quad v_{j+1} := \dots$$

- (b) Implementieren Sie in der Datei das verbesserte Eulerverfahren für die Schrittweiten $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-10}$ (ab Zeile 30, Spalte B bis K). Berechnen Sie anschließend den Fehler bei der jeweiligen Schrittweite in Zeile 7 sowie dessen Abwandlungen in Zeile 9 und 11. Erstellen Sie ein Diagramm mit x-Achse $-\log_2(\text{Schrittweite})$ und y-Achse $-\log_2(|\text{Fehler an Stelle } 0.5|)$.

Zusatzaufgabe: (+2P)

Für Schrittweiten $h = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$, sollten die entsprechenden Punkte im Diagramm in etwa auf einer Geraden liegen. Berechnen Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden (Siehe dazu Numerik 1: Gaußsche Ausgleichgerade) und Interpretieren Sie das Ergebnis.

Bemerkung: Falls Sie keine Werte zur Verfügung haben können sie die Punkte $(4; 6, 65E + 0)$, $(5; 8, 53E + 0)$, $(6; 1, 05E + 1)$, $(7; 1, 24E + 1)$ verwenden.

Zur Form der Abgabe dieser Aufgabe: Die von Ihnen vervollständigte Excel-Datei ist nicht abzugeben. Bitte reichen Sie zu Teilaufgabe (b) die Spalten A bis K von Zeile 1 bis etwa 31 oder mehr auf eine DinA4 (Querformat) bei. Bei Fragen bzgl. Excel oder OpenOffice können Sie sich an www.google.de oder johann.b.irl@googlemail.com wenden.

Sie werden zu dieser Datei in den nächsten Wochen nochmals eine Aufgabe gestellt bekommen. Speichern Sie die Datei unter anderem aus diesem Grund vorübergehend.

Aufgabe 3:**5 Punkte**

Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}u' &= Au \\ u(t_0) &= u_0 \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

in Abhängigkeit der Anfangswertparameter t_0, u_0 sowie der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A .

Hinweis: Da A symmetrisch ist, existiert eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren der Matrix A . Bestehen die Spalten der Matrix S aus diesen, so hat $D := S^t A S$ Diagonalgestalt.