Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 11.5.2011

Numerik II — Blatt 2

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $C^0([a,b],\mathbb{R})$, $-\infty < a < b < \infty$ der Raum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen, versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (Tf) := \int_a^b f(t)\,dt$$

lipschitzstetig ist und geben Sie die kleinstmögliche Lipschitzkonstante an.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $t_0 \in [a,b]$ und $\alpha > 0$. Wir definieren auf $C^0([a,b],\mathbb{R})$, die gewichtete Norm

$$\|f\|_{\infty,p_\alpha} := \max_{t\in[a,b]} |f(t)p_\alpha(t)|, \text{ wobei } p_\alpha(t) := e^{-\alpha|t-t_0|}.$$

Wir betrachten die Abbildung $S : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to C^0([a,b],\mathbb{R})$ definiert durch

$$(Sf)(t) := \int_{t_0}^t f(s)\,ds.$$

Zeigen Sie, dass

$$|(Sf)(t)| \le \|f\|_{\infty,p_\alpha} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha|t-t_0|} - 1)$$

gilt. Folgern Sie damit, dass S (global) lipschitzstetig bezüglich der gewichteten Norm $\|\cdot\|_{\infty,p_\alpha}$ auf $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie das maximales Existenzintervall um den Anfangswert an:

$$u' = \frac{e^{t-u}}{1+e^t}, \qquad u(0) = 1,$$

$$u' + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t^2}, \qquad u(1) = 0,$$

$$u' = \frac{1}{t}u - \frac{1}{t^2}u^2, \qquad u(1) = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es seien $f, g \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $f(t,\cdot)$ lipschitzstetig, d.h.

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le L|u-v| \text{ für alle } (t,u),\ (t,v) \in G.$$

Betrachte:

$$u' = f(t,u)\,, u(t_0) = u_0,$$
$$v' = g(t,v)\,, v(t_0) = v_0.$$

Nun gelte für $c_1, c_2 > 0$,

$$|u_0 - v_0| \le c_1, \text{ sowie } |f(t,u) - g(t,u)| \le c_2 \text{ für alle } (t,u) \in G.$$

Zeigen Sie, dass

$$|u(t) - v(t)| \le c_1 + c_2|t-t_0| + L\int_{t_0}^t |u(s) - v(s)|\,ds,$$

wann immer u, v auf $[t_0, t]$ existieren.