Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 4.5.2011

Numerik II — Blatt 1

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei J ein offenes Zeitintervall, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und f eine stetige Funktion auf $D := J \times \Omega$ nach Ω. Zeigen Sie, dass u genau dann eine Lösung des AWPs (Anfangswertproblems)

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

ist, wenn $u \in C(J; \Omega)$ in J folgende Integralgleichung löst:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds.$$

Bemerkung: Insbesondere ist u genau dann eine Lösung des AWPs, falls u Fixpunkt des Operators $T : C(J; \Omega) \to C(J; \Omega)$ mit $(Tv)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds$ ist.

Aufgabe 2: **14 Punkte**

Zum Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t)^2 \tag{2.1}$$

$$u(0) = 1 \tag{2.2}$$

definieren wir in Analogie zur Aufgabe 1 den Operator T durch

$$(Tv)(t) := u_0 + \int_0^t u(s)^2\, ds$$

(a) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten der Iteration

$$\begin{aligned} u^0 &:= 1 \\ u^k &:= T(u^{k-1}). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, das die Folge u^k auf $[0, 1)$ punktweise und auf $[0, b]$ mit $b \in (0, 1)$ gleichmäßig gegen die Lösung $u(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{j \geq 0} t^j$ des AWPs (2.1) konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $b > 0$ gibt, so dass der Operator T auf $C([0, b], [0, 2])$ eine Kontraktion ist. Folgern Sie daraus die Eindeutigkeit der Lösung auf $[0, b]$.