

Numerik II — Tutorium 2

Aufgabe 1:

Explizites, einfaches Eulerverfahren - Graphisch
Arbeiten Sie für die Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} u' &= 2t & v' &= \ln 2v \\ u(0) &= 0 & v(0) &= 1 \end{aligned}$$

jeweils folgende Punkte ab

- (a) Zeichnen Sie auf ein kariertes Blatt je ein 21 mal 21cm großes Koordinatensystem. Eine Längeneinheit entspricht jeweils 20cm. Beim zweiten AWP erstreckt sich die vertikale Achse jedoch von 1 bis 2.
- (b) Bestimmen Sie in den jeweiligen Koordinatensystemen die Linien auf welchen $u' = 0.00, 0.50, 1.00, 1.50, 2.00$ bzw. $v' = 1.00\ln 2, 1.25\ln 2, 1.50\ln 2, 1.75\ln 2, 2.00\ln 2$. Derartige Linien konstanter Steigung bezeichnet man als Isoklinien.
- (c) Von $P_0 = (t_0, u_0)$ aus gehen Sie für $h = 1.00, 0.50, 0.25$ und $0 \leq n \leq \frac{1}{h}$ wie folgt vor: Bestimmen Sie sich den Wert m_n der Isokline auf welcher der aktuelle Punkt $P_n = (t_n, u_n)$ liegt. Von P_n aus zeichnen Sie in Richtung positiver t -Achse ein Geradenstück mit Steigung m_n bis zur vertikalen Linie $t = t_{n+1} := t_n + h$. Der Schnittpunkt wird mit $P_{n+1} = (t_{n+1}, u_{n+1})$ bezeichnet.

Aufgabe 2:

Explizites, einfaches- und verbessertes Eulerverfahren
Anfangswertproblem

$$u' = u^2, u(0) = 1$$

Mit exakter Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

Das explizite, einfache Eulerverfahren schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} v_0 &:= u_0 \\ t_{j+1} &:= x_j + h \\ v_{j+1} &:= v_j + hf(t_j, v_j) \end{aligned}$$

Das explizite, verbesserte Eulerverfahren schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} v_0 &:= u_0 \\ t_{j+1} &:= x_j + h \\ \tilde{t}_j &:= x_j + \frac{h}{2} \\ \tilde{v}_j &:= v_j + \frac{h}{2}f(t_j, v_j) \\ v_{j+1} &:= v_j + hf(\tilde{t}_j, \tilde{v}_j) \end{aligned}$$

- (a) Machen Sie sich Gedanken wie Sie das verbesserte Verfahren graphisch interpretieren können.
- (b) Berechnen Sie mit dem einfachen Eulerverfahren jeweils den Näherungswert an der Stelle $t = 0.5$ für die Schrittweiten $h = 0.50, 0.25, 0.10, 0.05$
- (c) Berechnen Sie mit dem verbesserten Eulerverfahren jeweils den Näherungswert an der Stelle $t = 0.5$ für die Schrittweiten $h = 0.50, 0.25, 0.10$

- (d) Stellen Sie die Differenz von exaktem Wert $u(0.5)$ zu Näherungswert an der Stelle $t = 0.5$ in einer Tabelle den jeweiligen Schrittweiten gegenüber.

Aufgabe 3:

Konvergenzordnung des expliziten, einfachen Eulerverfahren

$$u' = \lambda u, u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}$$