Numerik II — Tutorium 1

Aufgabe 1:

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen
Eine DGL $u' = f(t, u)$ hat getrennte Variablen, wenn f ein Produkt der Form $f(t, u) = h(t)g(u)$ ist. Die Bezeichnung rührt daher, dass man für $g(u) \neq 0$ die DGL auch in der Form $\frac{u'}{g(u)} = h(t)$ schreiben kann, in der die Variablen getrennt erscheinen.
Lösungsansatz für

$$\begin{aligned} u' &= f(t, u) = h(t)g(u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

ist

$$\int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds$$

Man bestimme die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} u' &= u^2 \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
Eine DGL heißt lineare DGL 1.Ordnung, falls sie sich als $u' + f(t)u = g(t)$ darstellen lässt. Ist $g \equiv 0$, so heißt sie homogen, ansonsten inhomogen.
Lösungsansatz für

$$\begin{aligned} u' + f(t)u &= 0 \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

ist

$$u(t) = u_0 exp(-\int_{t_0}^{t} f(s) ds)$$

Man bestimme die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} u' + t^2 u &= 0 \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
Lösungsansatz für

$$\begin{aligned} u' + f(t)u &= g(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

ist

$$u(t) = exp(-\int_{t_0}^{t} f(s)ds)(\int_{t_0}^{t} g(s)exp(\int_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau)ds + \eta$$

Man bestimme die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} &u' + \frac{1}{t}u = t^2 \\ &u(1) = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Bernoullische Differentialgleichung
Als Bernoullische DGL bezeichnet man die Gleichung

$$u' = f(t)u + g(t)u^{\alpha} \ \alpha \ \in \mathbb{R}$$

Lösungsansatz: Transformiere die Gleichung mit $v = u^{1-\alpha}$ auf die lineare DGL 1. Ordnung

$$v' = (1-\alpha)f(t)v + (1-\alpha)g(t)$$

und löse diese. Anschließend rücktransformiert man die gewonnene Lösung.
Man bestimme die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} &u' = \frac{1}{t}u + tu^3 \\ &u(1) = 1 \end{aligned}$$