

Klausur zur Linearen Algebra für gymnasiales Lehramt

Nachname: Vorname:.....

Matrikelnummer:

Geburtsdatum:

alte LPO ☐ neue LPO ☐.

1	2	3	4	5	Σ

Bitte beachten Sie:

- (a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**
- (b) Arbeitszeit: 10:10 - 11:50 Uhr (100 Minuten).
- (c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.
- (d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**
- (e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.
- (f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Inverse von $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Lösung. Ich wähle die Methode wo man die Matrix mit Elementaroperationen umformt bis man zu der Einheitsmatrix kommt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Q_{21}(-4)]{Q_{31}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2(-2)]{Q_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & | & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3(1/11)]{Q_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & | & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/11 & -2/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Q_{13}(11)]{Q_{23}(-7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 16/11 & 3/11 & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4/11 & -2/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von A ist durch die 3×3 Matrix die rechts von der Einheitsmatrix liegt.

Bemerkung: Man kann auch die cramersche Regel anwenden, die vielleicht auch ein bisschen kurzer ist. Man kann auch diese Methode mit Umformungen ein bisschen anders schreiben, nämlich

$$\begin{aligned} A^{-1} &= Q_{13}(11)Q_{23}(-7)S_3(1/11)Q_{12}(-2)S_2(-2)Q_{32}(2)Q_{21}(-4)Q_{31}(-4) = \\ &\dots = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 16/11 & 3/11 & -7/11 \\ 4/11 & -2/11 & 1/11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinante von

$$B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \\ 15 & 6 & -21 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Ich berechne die Determinante mit der Laplace Formel und entwickle nach der 2. Spalte.

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)^{3+2}(6) \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(-6-3) + 1(12+14) = 8 \\ \Rightarrow \det(B) &= -6(8) = -48. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $F : K^n \rightarrow K^n$ eine K -lineare Abbildung, so dass für alle $v \in K^n$, $F(v) = F^2(v)$.

(a) Zeigen Sie : Es gibt eine basis $\mathcal{B}$ von K^n und eine ganze Zahl k , $0 \leq k \leq n$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eine Diagonalmatrix mit nur 1 und 0 auf der Diagonale}).$$

Beweis. Bemerkung (*): Sei $v \in \text{Im}(F)$. Dann $\exists w$, so dass $F(w) = v$. Daraus folgt, $F(v) = F(F(w)) \stackrel{Pr}{=} F(w) = v$.

Nach der bekannten Dimensionsformel, $\dim(\ker(F)) = n - \dim(\operatorname{Im}(F))$. Sei also $\mathcal{B} := (b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$, wobei die b_i , $1 \leq i \leq k$ eine Basis für $\operatorname{Im}(F)$ bilden und die b_i , $k+1 \leq i \leq n$ eine Basis für $\ker(F)$ bilden. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis für K^n ist. Da $|\mathcal{B}| = n$, reicht es zu zeigen, dass die b_i linear unabhängig sind.

Sei $\sum_{i=1}^n c_i b_i = 0(**)$, wobei $c_i \in K$. Da F linear ist folgt

$$0 = F(0) = F\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i F(b_i) + \sum_{i=k+1}^n c_i F(b_i) = \sum_{i=1}^k c_i b_i$$

(die letzte Gleichung folgt aus Bem. (*), $F(b_i) = b_i$ wenn $i \leq k$; wenn $i > k$, $F(b_i) = 0$).

Da die b_i , $i \leq k$ zu einer Basis gehören (angenommen), dann $c_i = 0$, $1 \leq i \leq k$. Man ersetzt dann diese Werte für c_i in Gleichung (**) und bekommt $\sum_{i=k+1}^n c_i b_i = 0$. Da die b_i , $i > k$ auch zu einer Basis gehören, sind $c_i = 0$, $i > k$. Also sind $c_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Da Gleichung (**) nur erfüllt sein kann wenn alle die Koeffizienten gleich null sind, dann sind die b_i , $1 \leq i \leq n$ linear unabhängig.

Nach Definition $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ (F(b_1))_{\mathcal{B}} & (F(b_2))_{\mathcal{B}} & \cdots & (F(b_n))_{\mathcal{B}} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$. Für alle i kleiner gleich k gilt

$$F(b_i) \stackrel{*}{=} b_i = \sum_{j=0}^{i-1} 0b_j + 1b_i + \sum_{j=i+1}^n 0b_j,$$

also $(F(b_i))_{\mathcal{B}} = e_i$ (der i . kanonische Basisvektor). Wenn $i > k$, $b_i \in \ker(F)$ also $F(b_i) =$

$$0 = \sum_{i=1}^n 0b_i, \text{ also } (F(b_i))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Insgesamt, } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

(Alternativer Beweis) Es wurde in der Vorlesung bewiesen, dass für jede lineare Abbildung $F : V \rightarrow V$, es Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind konstruiert wie folgt. Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis für $\operatorname{Im}(F)$ und sei $b_{k+1}, \dots, b_n$ eine Basis von $\ker(F)$. Sei jetzt $b_1, \dots, b_k$ bzw. (beliebige) Fasern über $v_1, \dots, v_k$ (i.e. $F(b_i) = v_i$). Weiterhin seien $v_{k+1}, \dots, v_n$, so dass $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ eine Basis von K^n ist (da jede linear unabhängige Menge zu einer Basis erweitert werden kann; in diesem Fall erweitern wir die Basis vom Bild zu einer Basis von K^n). *Es ist an dieser Stelle, dass meine originelle Aussage falsch war, nämlich, man kann diese $v_{k+1}, \dots, v_n$ nicht immer als eine Basis vom Kern nehmen!!* Dann sind $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$ Basen die die gewünschte Bedingung erfüllen.

Wenn F eine Projektion ist aus Bemerkung (*), können wir $v_i = b_i$ für $i \leq k$ wählen. Weiterhin, wenn man beweist (wie oben), dass die Basis Vektoren vom Kern, $b_{k+1}, \dots, b_n$, und die Basis Vektoren vom Bild linear unabhängig sind, dann kann die Basis vom Bild zu einer Basis von K^n mit $b_{k+1}, \dots, b_n$ erweitert werden. Also können wir auch $v_i = b_i$ für $i > k$ wählen. Daraus folgt, dass wir $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ wählen können, also $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

(b) Zeigen Sie, dass F nur 0 und 1 als Eigenwerte hat.

Beweis. F ist diagonalisierbar nach Definition, i.e. es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ wobei $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist, nämlich $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (aus Teil (a)). Im Fall diagonalisierbar liegen alle Eigenwerte von F auf der Diagonale der Diagonalmatrix. Die einzigen Einträge auf der Diagonale der Matrix $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind 0 und 1, also können nur 0 und 1 die Eigenwerte von F sein. $\square$

Aufgabe 4. Seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ ein K -Vektorraum ist.

Beweis. Es gibt 9 Vektorraum Axiome zu prüfen. Die Behauptung folgt aus drei Annahmen, (1) Die Definition von $V \times W$ als eine Menge: $V \times W := \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$, (2) V, W sind K Vektorräume und (3) die Definition von $V \times W$ und seine Verknüpfungen, nämlich: $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$, $\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$ wobei $\alpha \in K$.

1. Abgeschlossenheit: $(v, w) + (v', w') \stackrel{3}{=} (v + v', w + w') \stackrel{1,2}{\in} V \times W$
2. Existenz eines neutralen Elements: $\exists 0_V, 0_W \in V, W$ (aus (2)) und $(0_V, 0_W) \in V \times W$ (aus (1)). Also $(v, w) + (0_V, 0_W) \stackrel{3}{=} (v + 0_V, w + 0_W) \stackrel{2}{=} (v, w)$. Also $(0_V, 0_W) = 0_{V \times W}$.
3. Existenz additiver Inversen: Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann $\exists -v, -w \in V, W$ (aus (2)) und $(-v, -w) \in V \times W$ (aus (1)). Weiterhin, $(v, w) + (-v, -w) \stackrel{3,2}{=} (0_V, 0_W) = 0_{V \times W}$. Also alle Elemente besitzen Inversen.
4. Assoziativität 1: $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') \stackrel{3}{=} ((v + v') + v'', (w + w') + w'') \stackrel{2}{=} (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) \stackrel{3}{=} (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$
5. Kommutativität: $(v, w) + (v', w') \stackrel{2,3}{=} (v', w') + (v, w)$ folgt aus der Kommutativität von der Addition in V und W (Bedingung (2)).
6. Distributivität 1: Sei $\lambda \in K$. Dann $\lambda((v, w) + (v', w')) \stackrel{3}{=} \lambda(v + v', w + w') \stackrel{3,2}{=} (\lambda v + \lambda v', \lambda w + \lambda w') \stackrel{3}{=} \lambda(v, w) + \lambda(v', w')$
7. Assoziativität 2: Seien $\lambda, \alpha \in K$. Dann $\lambda(\alpha(v, w)) \stackrel{3}{=} (\lambda(\alpha(v)), \lambda(\alpha(w))) \stackrel{2}{=} ((\lambda\alpha)v, (\lambda\alpha)w) \stackrel{3}{=} (\lambda\alpha)(v, w)$.
8. Distributivität 2: $(\lambda + \alpha)(v, w) \stackrel{3}{=} ((\lambda + \alpha)v, (\lambda + \alpha)w) \stackrel{2}{=} (\lambda v + \alpha v, \lambda w + \alpha w) \stackrel{3}{=} \lambda(v, w) + \alpha(v, w)$.
9. Multiplikation mit 1: $1(v, w) \stackrel{3}{=} (1v, 1w) \stackrel{2}{=} (v, w)$. □

Aufgabe 5. Sei $C \in M(3 \times 3, K)$ eine Matrix mit drei paarweise verschiedene Eigenwerte und seien v_1, v_2, v_3 drei Eigenvektoren bzgl. dieser drei Eigenwerte. Zeigen Sie: Die drei Vektoren, v_1, v_2 , und v_3 , sind linear unabhängig.

Beweis. Wir benutzen den Hilfsatz: "Für alle $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ und $M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt

$$(M - \lambda E_n)(M - \beta E_n) = (M - \beta E_n)(M - \lambda E_n) \text{ (sie sind kommutativ).}"$$

Beweis des Hilfsatzes: $(M - \lambda E_n)(M - \beta E_n) = M^2 - (\lambda + \beta)M + (\lambda\beta)E_n = (M - \beta E_n)(M - \lambda E_n)$. ✓

Seien $\alpha_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte, so dass $Cv_i = \alpha_i v_i$ und $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$, so dass $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ (*). Wir multiplizieren diese Gleichung auf beiden Seiten mit $(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)$ und bekommen

$$\begin{aligned} 0 &= (C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)(c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \\ &= c_1(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_1 + c_2(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_2 + c_3(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_3 \\ &\quad \text{(Matrizenmult. ist linear)} \\ &= c_1(C - \alpha_2 E_3)(C - \alpha_1 E_3)v_1 + c_2(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_2 + c_3(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_3 \\ &\quad \text{(aus dem Hilfsatz)} \\ &= c_3(C - \alpha_1 E_3)(C - \alpha_2 E_3)v_3 \text{ (die ersten 2 Terme sind 0 weil } v_{1,2} \in \ker(C - \lambda_{1,2} E_3)) \\ &= c_3(C - \alpha_1 E_3)(\alpha_3 - \alpha_2)v_3 \text{ (} Cv_3 = \alpha_3 v_3 \text{ nach Annahme und } \alpha_2 E_3 v_3 = \alpha_2 v_3) \\ &= c_3(\alpha_3 - \alpha_2)(C - \alpha_1 E_3)v_3 \text{ (Matrixmult. ist linear)} \\ &= c_3(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)v_3 \text{ (aus dem selben Grund als vorher).} \end{aligned}$$

Da diese letzte Gleichung gleich null ist und $v \neq 0$ (v ist ein Eigenvektor und daher niemals 0), muss also $c_3(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$. Aber die Eigenwerte sind angenommen verschieden also $(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) \neq 0$. Da ein Körper keine Nullteiler hat, muss also c_3 gleich null sein.

Wenn man in das vorherige Argument die Indizes 2 und 3 tauscht bekommt man $c_2 = 0$ und ähnlichweise $c_1 = 0$. Also ist die Gleichung (*) nur erfüllt wenn $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ und die Vektoren sind nach Definition linear unabhängig. $\square$

(Der folgende alternative Beweis benutzt den Satz, “Wenn M eine $n \times n$ Matrix mit n (paarweise) verschiedene Eigenwerte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ ist, so dass $Mv_i = \lambda v_i \ \forall 1 \leq i \leq n$, dann ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis für K^n .” Das ist aber normalerweise nicht erlaubt, weil wir die lineare Unabhängigkeit benutzen um diesen Satz zu beweisen. Also ist es unlogisch den folgenden Beweis anzugeben. Dafür würde man nicht die volle Punktzahl bekommen.)

Beweis. Nach dem vorherigen Satz sind v_1, v_2, v_3 eine Basis für $\mathbb{R}^3$. Sie müssen sie linear unabhängig sein. $\square$