MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

SoSe 2011
30.07.11

Klausur zur Linearen Algebra für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

Studiengang: .... ggf. alte LPO ☐ neue LPO ☐

1	2	3	4	5	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 10:10 - 11:50 Uhr (100 Minuten).

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt dieselbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass jeder euklidische Vektorraum ein normierter Vektorraum ist, indem Sie eine geeignete Norm angeben und die Normeigenschaften nachweisen. (Die Cauchy-Schwarz Ungleichung darf benutzt werden.)

Beweis. Sei V ein euklidischer VR. Nach Definition ist V ein $\mathbb{R}$-VR ausgestattet mit einem Skalarprodukt, $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Sei jetzt $||\cdot||$ definiert durch $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Wir zeigen jetzt, dass $||\cdot||$ eine Norm ist. Seien $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die Cauchy-Schwarz Ungleichung: $\langle x, y\rangle \leq ||x|| \cdot ||y||$.

1). Positivdefinitheit: Jedes Skalarprodukt ist positivdefinit, also $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in V$. Weiterhin $\sqrt{w} \geq 0\ \forall w \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ (Eigenschaft der reelen Zahlen), also $||x|| \geq 0\ \forall x \in V$. Weiterhin, $\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \overset{Eig.\ \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \langle x, x\rangle = 0 \overset{\langle,\rangle\ p.d.}{\Leftrightarrow} x = 0$.

2). $||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \overset{\langle,\rangle\ bil.}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} \overset{Eig.\ \mathbb{R}}{=} |\lambda|||x||$.

3). Δ-Ungl.:

$$\begin{aligned}
||x + y|| &= \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \\
&\overset{\langle,\rangle\ bil.}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle} \\
&\overset{\langle,\rangle\ symm.}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle} \\
&\overset{CS,\ Def.\ ||\cdot||}{\leq} \sqrt{||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2} = \sqrt{(||x|| + ||y||)^2} = ||x|| + ||y||.
\end{aligned}$$

Nach Definition ist also $||\cdot||$ eine Norm auf V und deshalb ist V ein normierter Raum. □

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie **alle** Eigenwerte (mit algebraischen Vielfachheiten) und **einen** der Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
CP(B) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & 2 & 4-x \end{pmatrix} &= (2-x)\left((1-x)(4-x) + 2\right) \\
= (2-x)(4 - 5x + x^2 + 2) = (2-x)(6 - 5x + x^2) &= (2-x)(x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B sind also 2 und 3 mit algebraischen Vielfachheiten $AV(2) = 2$ und $AV(3) = 1$. Weiterhin, $\ker(B - 2E_3) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von B.

(b) Ist B diagonalisierbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Beweis. Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar, da die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 2 is 2. Aber der Kern von $B - 2E_3$ ist span $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und ist also nur 1-dimensional.

□

Aufgabe 3. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Da die Determinante von A gleich 1 ist, kann man die cramersche Regel anwenden, ohne mit Brüchen zu rechnen. Bei der cramerschen Regel gilt,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & -11 & 13 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Seien $F \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix, so dass $F^3 = 0$ und $F^2 \neq 0$.

(a) Sei jetzt $v \in K^n$ ein Vektor, so dass $F^2 v \neq 0$. Beweisen Sie, dass die drei Vektoren, v, Fv und $F^2 v$, linear unabhängig sind.

Beweis. Seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, so dass $c_1 v + c_2 Fv + c_3 F^2 v \stackrel{*}{=} 0$. Nehme F^2 auf beiden Seiten der Gleichung $*$. Die rechte Seite wird $F^2(0) = 0$, da F linear ist. Die linke Seite wird $c_1 F^2 v + c_2 F^3 v + c_3 F(F^3 v)$ da F linear ist. Per Annahme und Linearität sind die zwei letzten Terme null, also Gleichung $*$ wird $c_1 F^2 v = 0$. Da V ein Vektorraum ist, muss entweder $c_1 = 0$ oder $F^2 v = 0$. Per Annahme, $F^2 v \neq 0$ also $c_1 = 0$.

Wenn man F auf beiden Seiten von Gleichung $*$ nimmt folgt es ählicherweise herraus, dass $c_2 = 0$. Gleichung $*$ wird also $c_3 F^2 v = 0$, und deshalb muss c_3 auch gleich null sein.

Da Gleichung $*$ nur erfüllt sein kann, wenn alle Koeffizienten gleich null sind, dann sind die Vektoren $v, Fv, F^2 v$ linear unabhängig. □

(b) Seien $v \in K^n$, $v \neq 0$ und $\lambda \in K$, so dass $Fv = \lambda v$. Beweisen Sie, dass dann $\lambda = 0$ sein muss.

Beweis. Sei $Fv = \lambda v$. Aus der Linearität von F folgt $0 = F^3 v = \lambda^3 v$. Da V ein Vektorraum ist und $v \neq 0$, dann $\lambda^3 = 0$. Da K ein Körper ist, ist also $\lambda = 0$. □

Aufgabe 5.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung,

$$\begin{aligned} \mathrm{spur}_{2\times 2} : M(2 \times 2, K) &\to K \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &\mapsto a_{11} + a_{22} \end{aligned}$$

K-linear ist.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathrm{spur}\left(\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) &= \text{(aus Matrizen Operation)} \\ \mathrm{spur}\begin{pmatrix} \lambda a_{11} + b_{11} & \lambda a_{12} + b_{12} \\ \lambda a_{21} + b_{21} & \lambda a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} &= \text{(aus der Def. von spur)} \\ \lambda(a_{11} + a_{22}) + b_{11} + b_{22} &= \\ \lambda \mathrm{spur}(a_{ij}) + \mathrm{spur}(b_{ij}).\square \end{aligned}$$

(b) Geben Sie eine Basis von $\ker(\mathrm{spur}_{2\times 2})$ an.

Lösung. $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$