MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2011

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1. Formen Sie die folgende Matrix A durch Multiplikation mit Elementarmatrizen zur Einheitsmatrix um. Was ist die Inverse von A?

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie alle Lösungen x von der Gleichung $Ax = b$ für die folgenden Paare A, b. Falls $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ geben Sie die Lösung in der Form $v+\text{Lös}(A, 0)$ an.

i) $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

ii) $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

iii) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

iv) Rechnen Sie den Rang der Matrix A :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & -9 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie : Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4. Eine Matrix $N \in M(n \times n, K)$ heisst nilpotent falls ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $N^i = 0$ (die Null-matrix). Beweisen Sie die folgenden zwei Aussagen.

i) Für alle $A \in M(n \times n, K)$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt :

$$E_n - A^m = (E_n - A)\left(\sum_{j=0}^{m-1} A^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{m-1} A^j\right)(E_n - A).$$

(Dabei seien E_n die $n \times n$ Einheitsmatrix und $A^0 = E_n$.)

ii) Ist $A \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix, so ist $E_n - A$ invertierbar. Geben Sie die inverse Matrix an.

Abgabe : Dienstag, 28.06.2011 14 Uhr.
Übungsblätter und Informationen unter : http ://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼carr