

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1.

- i) Sei V ein Vektorraum von Dimension n , und seien $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ zwei angeordnete Basen von V . Zeigen Sie : Für alle j mit $1 \leq j \leq n$ ist die Spalte j der Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$ der Vektor b_j dargestellt in der Basis $\mathcal{A}$.
- ii) Lösen Sie Aufgaben 1.ii) und 1.iii) von Blatt 5 mithilfe von Transformationsmatrizen.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times r, K)$ Matrizen. Zeigen Sie die folgende Abschätzungen :

$$\text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n \leq \text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}.$$

Man beweise : Für alle m, n, r mit $m \leq n \leq r$ existieren Matrizen A und B wie oben, so dass die Ungleichungen scharf sind, d.h.

$$\text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n = \text{rang}(AB) = \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}.$$

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe, betrachten wir die Menge

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(Wegen der Länge dieser Aufgabe wird sie zweimal so viel als eine gewöhnliche Aufgabe bewertet, also mit 12 Punkten.)

- a) Berechnen Sie das folgende Produkt von Matrizen aus C : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- b) Zeigen Sie, dass jede Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, wobei entweder $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, eine Inverse hat, und geben Sie sie an.
- c) Zeigen Sie, dass $C \setminus \{0\}$ eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{R})$ ist.
- d) Zeigen Sie, dass C ein Untervektorraum von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist.
- e) Benutzen Sie Teile c) und d) um zu zeigen, dass C ein Körper ist.

- f) An was erinnert das Produkt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$? Für welche Elemente, $X, Y \in C$ ist $X^2 = 1, Y^2 = -1$?
- g) Welche Elemente aus C entsprechen den rein reellen bzw. rein imaginären Elemente aus $\mathbb{C}$?
- h) Finden sie eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\phi : C \rightarrow \mathbb{C}$, die zusätzlich zur Linearität die Eigenschaft hat, dass $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ für alle $A, B \in C$.

Abgabe : Dienstag, 21.06.2011 14 Uhr.

Übungsblätter und Informationen unter : <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~carr>