MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2011

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1. Für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + a_3 \\ -6a_2 + 12a_3 \\ -2a_1 + 2a_2 - 2a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

berechne man die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$, falls

i) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (die Standardbasis);

ii) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$;

iii) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Erinnerung: Für Vektorräume, V und W, mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$ hat die $m \times n$ Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ in Zeile i und Spalte j den Koeffizient von $f(\mathcal{B}_j)$ auf $\mathcal{A}_i$.

Aufgabe 2. Es sei daran erinnert, dass die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, geschrieben $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Seien $\mathcal{A} := \{\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2\}$ und $V := \operatorname{span}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Betrachten Sie den Ableitung Homomorphismus $F : V \to V$, $F(f) = f'$.

i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von V ist.

ii) Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$.

iii) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Ker}(F)$ und $\operatorname{Im}(F)$.

Aufgabe 3. Eine K-lineare Abbildung, ϕ, heißt *Projektion* falls $\phi \circ \phi = \phi$ gilt. Für Teile i) und ii) sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Projektion für die $(1,2) \in \mathrm{Ker}(\phi)$ und $(1,-1) \in \mathrm{Im}(\phi)$. Man berechne die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)$ falls

i) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (die Standardbasis);

ii) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\rho : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\rho \circ \rho = \rho$.

iii) Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl k mit $0 \leq k \leq n$ gibt und eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E_k die $k \times k$ Einheitsmatrix bezeichnet (d.h. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\rho)$ hat die Nummer 1 in den k ersten Diagonaleinträge und die Nummer 0 in allen anderen Einträge).

Abgabe: MITTWOCH, 15.06.2011 14 Uhr.
Übungsblätter und Informationen unter: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼carr