MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2011

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1. Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität, und geben Sie ggf. den Kern der Abbildung an.

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (3x+2,x)$ ($\mathbb{R}$-linear)

ii) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x,y) \mapsto x+2y^2$ ($\mathbb{Q}$-linear)

iii) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ ($\mathbb{R}$-linear und $\mathbb{C}$-linear)

iv) $f_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ P \mapsto P'$ ($\mathbb{R}$-linear auf dem Vektorraum der Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$)

Schreibweisen: Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ bedeutet $\overline{z}$ seine komplex Konjugierte, $a - bi$. Die Schreibweise $K[x]$ bezeichnet den Raum aller Polynomen mit Koeffizienten in K. Wenn P eine Funktion ist bedeutet P' seine Ableitung.

Aufgabe 2. *i)* Zeigen Sie: Die Menge $M_K^{3\times 3}$ der 3×3 Matrizen über dem Körper K ist mit den folgendermaßen elementweise definierten Verknüpfungen:

$$\text{innere Verknüpfung: } \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\text{äußere Verknüpfung: } \forall \lambda \in K,\ \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ein K-Vektorraum.

ii) Zeigen Sie: Die Abbildung $\mathrm{spur} : M_K^{3\times 3} \to K$ gegeben durch

$$\mathrm{spur} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{2,2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$$

ist K-linear. Geben Sie eine Basis von $\ker(\mathrm{spur})$ an.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum. Für ein Homomorphismus $F : V \to V$ ist die Menge der *Fixpunkte* von F definiert durch $\mathrm{Fix}(F) = \{v \in V \mid F(v) = v\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(F) \subseteq V$ ein Untervektorraum ist.

b) Seien die Homomorphismen F und G gegeben durch

   i) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wobei

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

   also $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ F(x) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot x;$

   ii) $G : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ P \mapsto P'$.

   Bestimmen Sie eine Basis für $\mathrm{Fix}(F)$ bzw. $\mathrm{Fix}(G)$.

Aufgabe 4. Sei $F : V \to V$ ein Homomorphismus des Vektorraums V und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt mit

$$F^n(v) \neq 0 \text{ und } F^{n+1}(v) = 0$$

wobei $F^n(v) := F(F(\cdots(F(v))\cdots))$ (F komponiert mit sich selbst n mal).

Beweisen Sie, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), ..., F^n(v)$ linear unabhängig sind.

Hinweis: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~carr/blatt4-Hinweis.pdf