Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = (1, 2, t+2), v_2 = (-1, t+1, t), v_3 = (0, t, 1)$$

erzeugten Untervektorraums $U_t \subseteq R^3$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 2. Seien V_1 der von den Vektoren

$$v_1 := (1, 0, 0, 1), v_2 = (-2, -1, 1, 1), v_3 = (-3, -2, 2, 3)$$

erzeugter Unterraum von $\mathbb{R}^4$ und V_2 der von den Vektoren

$$v_4 = (2, 1, 0, 3), v_5 = (-1, -1, 0, 2), v_6 = (7, 4, 0, 11)$$

erzeugter Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Man berechne die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(V_1)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V_2)$, $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2)$.

Aufgabe 3. Seien V und W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'),\ \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w),$$

wobei $v \in V,\ w \in W$ und $\lambda \in K$, ebenfalls zu einem K-Vektorraum wird.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis gegeben durch $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und W ein K-Vektorraum mit Basis gegeben durch $\{w_j \mid 1 \leq j \leq m\}$. Zeigen Sie, dass

$$\{(v_i, 0) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(0, w_j) \mid 1 \leq j \leq m\}$$

eine Basis von $V \times W$ ist (vgl. Aufgabe **3**). Insbesondere gilt

$$\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W),$$

falls $\dim(V)$ und $\dim(W) < \infty$.

Abgabe: Dienstag, 31.5.2011 14 Uhr.
Übungsblätter und Informationen unter: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼carr