Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 11

Aufgabe 1. Wir betrachten die 3×3 Matrix, $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie eine Diagonalmatrix die zu A **äquivalent** ist.

(b) Zeigen Sie : A ist nicht diagonalisierbar, d.h. es existiert keine Diagonalmatrix die zu A **ähnlich** ist.

(c) Triagonalisieren Sie A.

Aufgabe 2. Prüfen Sie welche der folgenden Abbildungen, $||\cdot||_{.} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm ist. Dabei seien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, x_j für $j = 1, ..., n$ die Komponenten von $\mathbf{x}$, und $|\cdot|$ der Betrag einer reelen Zahl.

(a) $||\mathbf{x}||_a := \sup\limits_{1 \le j \le n} \{|x_j|\}$

(b) $||\mathbf{x}||_b := \sum_{j=1}^n |x_j|$

(c) $||\mathbf{x}||_c := \sum_{j=1}^n (x_j)^2$

Aufgabe 3. (a) Seien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarproduct auf einem reelen Vektorraum und $||\cdot||$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm, $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Zeigen Sie die Identität,

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}.$$

Bemerkung : Wenn mann alle Normen kennt, kennt man das gesamte Skalarprodukt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Norm an für die $\frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$ kein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C}^0$ der Vektorraum von stetigen Funktionen, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie : Die Abbildung,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$
$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) g(x) dx,$$

ist ein Skalarprodukt.

Hinweis : Zuerst muss man zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.

Abgabe : Dienstag, 26.07.2011 14 Uhr.