MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2011

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1. Es sei daran erinnert, dass eine Matrix A *nilpotent* heisst falls es eine natürliche Zahl m gibt, so dass $A^m = 0$. Man beweise die folgenden zwei Aussagen.

(a) Eine nilpotente Matrix hat nur 0 als Eigenwert.

(b) Die einzige nilpotente Matrix die diagonalisierbar ist, ist die Nullmatrix.

Aufgabe 2. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heisst *Projektor* falls die Abbildung von K^n nach K^n gegeben durch $v \mapsto Av$ eine Projektion ist, d.h. $Av = A^2v$ für alle $v \in K^n$. Man beweise die folgende zwei Aussagen.

(a) Ein Projektor hat nur 1 und 0 als Eigenwerte.

(b) Jeder Projektor ist diagonalisierbar.

Aufgabe 3. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen, erst betrachtet als Matrizen mit reelen Koeffizienten und dann betrachtet als Matrizen mit komplexen Koeffizienten. Man entscheide jeweils, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 9 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 12 & -8 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei $A = (a_{ij})$ eine invertierbare $n \times n$ Matrix und sei $B = (b_{ij})$ die Inverse von A. Benutzen Sie die *cramersche Regel* gegeben durch $b_{ji} := (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ij})}{\det(A)}$ um die Inversen von den invertierbaren Matrizen in Aufgabe 3 zu berechnen. (Was können die Eigenwerte von einer invertierbaren Matrix sein ?)

Abgabe : Dienstag, 19.07.2011 14 Uhr.
Übungsblätter und Informationen unter : http ://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼carr