

Übungen zur Linearen Algebra

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1. Diese Aufgabe richtet sich in erster Linie an Studierende im 2. Semester.

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

- (a) Für jedes $\phi \in [0, 2\pi)$ die Drehung um ϕ , d.h. $d_\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $d_\phi(z) = e^{i\phi}z$;
- (b) Die komplexe Konjugation $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $c(z) = z^*$;
- (c) Für jedes $\phi \in [0, 2\pi)$ die Drehung um ϕ mit anschließender komplexer Konjugation $d_\phi^* := c \circ d_\phi$, also $d_\phi^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $d_\phi^*(z) = (e^{i\phi}z)^*$.

Es seien D die Menge aller Drehungen $D := \{d_\phi : \phi \in [0, 2\pi)\}$ und D^* die Menge aller Drehungen mit anschließender komplexer Konjugation $D^* := \{d_\phi^* : \phi \in [0, 2\pi)\}$.

Zeigen Sie: Die Menge $G := D \cup D^*$ ist zusammen mit der Komposition von Abbildungen (also $(G, \circ)$) eine nicht-kommutative Gruppe. Geben Sie das neutrale Element und für jedes Element das Inverse an.

Welches Element beschreibt eine Spiegelung an der imaginären Achse, welches eine Spiegelung an der reellen Achse?

Zeigen Sie: D ist eine Untergruppe von G , aber D^* ist keine Untergruppe von G .

Erinnerung: Die Komposition von Abbildungen $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}$ und $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}$ ist eine Abbildung definiert über $g \circ f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$, $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in \mathcal{D}$.

Aufgabe 2. Gegeben seien $V := \{(a, b, c) : 5a + 3b - 4c = 0\}$ und $W := \{(a, b, c) : a - b + 2c = 0\}$. Was sind V , W , $V \cap W$ und $V \cup W$ geometrisch? Zeigen Sie: V , W und $V \cap W$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$, $V \cup W$ ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Rechenregeln $\forall x, y \in K$:

$$(-1)x = -x \quad (-x)y = x(-y) = -(xy) \quad xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Die Menge aller Parabeln (d.h. aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$) ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, die Menge aller linearen Funktionen ist ein Untervektorraum davon.

Abgabe: Dienstag, 17.5.2011 14 Uhr.

Übungsblätter und Informationen unter: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~carr>