MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 8
14.12.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“
— Lösungsvorschlag —

58. a) Bei Variante 1 zahlt der Autofahrer zunächst $20\,\ell \cdot 0,95 € /\ell = 19 €$, dann $20\,\ell \cdot 1,05 € /\ell = 21 €$, zusammen also 40 € für 40 ℓ; der Durchschnittspreis liegt demnach bei $\dfrac{40 €}{40\,\ell} = 1 € /\ell$ (arithmetisches Mittel).

Bei Variante 2 tankt der Autofahrer zunächst $\dfrac{20 €}{0{,}95 € /\ell} = 21{,}05\ \ell$, dann $\dfrac{20 €}{1{,}05 € /\ell} = 19{,}05\ \ell$, zusammen also 40,1 ℓ für 40 € ; der Durchschnittspreis liegt demnach bei $\dfrac{40 €}{40{,}1\ \ell} = 0{,}998 € /\ell$ (harmonisches Mittel).

b) Bezeichne s die Entfernung zwischen A und B. Dann benötigt der Wagen für den Hinweg $\frac{s}{v_1}$ und für den Rückweg $\frac{s}{v_2}$, insgesamt also $\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$ für die Strecke $2s$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v liegt also bei

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Es gilt also $\frac{1}{v} = \frac{1}{2}(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})$ (harmonisches Mittel).

c) Die Bevölkerungszahl nehme alle 20 Jahre um p % zu; damit muß

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 2, \quad \text{also} \quad p = (\sqrt{2} - 1) \cdot 100 = 41{,}4$$

gelten. Damit betrug die Bevölkerungszahl im Jahre 1940 etwa 1,41 Mio. und im Jahre 1980 etwa 2,83 Mio. (geometrisches Mittel).

59. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^2 - 2\,x\,x_i + x_i^2) = n\,x^2 - 2\,x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

f ist also eine quadratische Funktion von x mit dem positiven Koeffizienten n von x^2; damit besitzt f genau ein Minimum, und zwar beim Scheitelpunkt

$$-\frac{1}{2n}\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

der Parabel, dem arithmetischen Mittel von $x_1, \ldots, x_n$.

60. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{\theta_C} &= \tfrac{1}{10}\,(42+37+52+48+44+36+49+59+41+55) = 46{,}3\\
s^2_{\theta_C} &= \tfrac{1}{9}\,(4{,}3^2+9{,}3^2+5{,}7^2+1{,}7^2+2{,}3^2+10{,}3^2+2{,}7^2+\\
&\qquad +12{,}7^2+5{,}3^2+8{,}7^2) = 58{,}233\\
&= \tfrac{1}{9}\,(42^2+37^2+52^2+48^2+44^2+36^2+49^2+59^2+41^2+55^2-\\
&\qquad -10\cdot 46{,}3^2) = 58{,}233\\
s_{\theta_C} &= \sqrt{s^2_{\theta_C}} = \sqrt{58{,}233} = 7{,}631
\end{aligned}$$

b) Es ist

θ_C	42	37	52	48	44
θ_F	107,6	98,6	125,6	118,4	111,2

θ_C	36	49	59	41	55
θ_F	96,8	120,2	138,2	105,8	131,0

c) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{\theta_F} &= \tfrac{9}{5}\cdot\overline{\theta_C}+32 = \tfrac{9}{5}\cdot 46{,}3+32 = 115{,}34\\
s^2_{\theta_F} &= (\tfrac{9}{5})^2\cdot s^2_{\theta_C} = (\tfrac{9}{5})^2\cdot 58,233 = 188{,}676\\
s_{\theta_F} &= \left|\tfrac{9}{5}\right|\cdot s_{\theta_C} = \tfrac{9}{5}\cdot 7,631 = 13{,}736
\end{aligned}$$

61. a) Es ist

$$n = 3+6+7+12+9+5 = 42$$

und damit

x_i	2	4	6	8	10	12
n_i	3	6	7	12	9	5
r_i	0,071	0,143	0,167	0,286	0,214	0,119

b) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{42}\,(3\cdot 2+6\cdot 4+7\cdot 6+12\cdot 8+9\cdot 10+5\cdot 12) = 7{,}571\\
s^2_x &= \tfrac{1}{41}\,(3\cdot 2^2+6\cdot 4^2+7\cdot 6^2+12\cdot 8^2+9\cdot 10^2+5\cdot 12^2-\\
&\qquad -42\cdot 7{,}571^2) = 8{,}306\\
s_x &= \sqrt{s^2_x} = \sqrt{8{,}306} = 2{,}882
\end{aligned}$$

62. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{8}\,(27{,}2+32{,}0+28{,}4+39{,}2+33{,}2+24{,}8+32{,}0+29{,}6) = 30{,}8\\
s^2_x &= \tfrac{1}{7}\,(3{,}6^2+1{,}2^2+2{,}4^2+8{,}4^2+2{,}4^2+6{,}0^2+1{,}2^2+1{,}2^2) = 19{,}337\\
s_x &= \sqrt{s^2_x} = \sqrt{19{,}337} = 4{,}397
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$x^* = 39{,}2 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{8{,}4}{4{,}397}\sqrt{\tfrac{8}{7}} = 2{,}042 \qquad \text{und} \qquad f = 6.$$

Da $r^* = 2{,}042$ nicht größer als der Tabellenwert $r_{6;0{,}99} = 2{,}208$ zum Sicherheitsniveau 99 % ist, wird $x^* = 39{,}2$ nicht als Ausreißer festgestellt.

c) Da $r^* = 2{,}042$ nun größer als der Tabellenwert $r_{6;0{,}95} = 1{,}870$ zum Sicherheitsniveau 95 % ist, wird $x^* = 39{,}2$ als Ausreißer festgestellt und aus der Zufallsstichprobe entfernt.

Wir betrachten im folgenden also die verkürzte Stichprobe

27,2 32,0 28,4 33,2 24,8 32,0 29,6

Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{7}(27{,}2 + 32{,}0 + 28{,}4 + 33{,}2 + 24{,}8 + 32{,}0 + 29{,}6) = 29{,}6 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{6}(2{,}4^2 + 2{,}4^2 + 1{,}2^2 + 3{,}6^2 + 4{,}8^2 + 2{,}4^2 + 0{,}0^2) = 9{,}120 \\
s_x &= \sqrt{s_x^2} = \sqrt{9{,}120} = 3{,}020
\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 24{,}8 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{4{,}8}{3{,}020}\sqrt{\tfrac{7}{6}} = 1{,}717 \qquad \text{und} \qquad f = 5.$$

Da $r^* = 1{,}717$ nicht größer als der entsprechende Tabellenwert $r_{5;0{,}95} = 1{,}848$ ist, wird $x^* = 24{,}8$ nicht als Ausreißer festgestellt; es handelt sich hierbei bereits um eine statistisch homogene Stichprobe.

63. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{8}(35 + 39 + 36 + 45 + 37 + 33 + 39 + 40) = 38 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{7}(3^2 + 1^2 + 2^2 + 7^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2 + 2^2) = \tfrac{94}{7} = 13{,}429 \\
s_x &= \sqrt{s_x^2} = \sqrt{13{,}429} = 3{,}665
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$x^* = 45 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{7}{3{,}665}\sqrt{\tfrac{8}{7}} = 2{,}042 \qquad \text{und} \qquad f = 6.$$

Da $r^* = 2{,}042$ nicht größer als der Tabellenwert $r_{6;0{,}99} = 2{,}208$ zum Sicherheitsniveau 99 % ist, wird $x^* = 45$ nicht als Ausreißer festgestellt.

c) Da $r^* = 2{,}042$ nun größer als der Tabellenwert $r_{6;0{,}95} = 1{,}870$ zum Sicherheitsniveau 95 % ist, wird $x^* = 45$ als Ausreißer festgestellt und aus der Zufallsstichprobe entfernt.

Wir betrachten im folgenden also die verkürzte Stichprobe

35 39 36 37 33 39 40

Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{7}\,(35+39+36+37+33+39+40) = 37 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{6}\,(2^2+2^2+1^2+0^2+4^2+2^2+3^2) = \tfrac{19}{3} = 6{,}333 \\
s_x &= \sqrt{s_x^2} = \sqrt{6{,}333} = 2{,}517
\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 33 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{4}{2{,}517}\sqrt{\tfrac{7}{6}} = 1{,}717 \qquad \text{und} \qquad f = 5.$$

Da $r^* = 1{,}717$ nicht größer als der entsprechende Tabellenwert $r_{5;0,95} = 1{,}848$ ist, wird $x^* = 33$ nicht als Ausreißer festgestellt; es handelt sich hierbei bereits um eine statistisch homogene Stichprobe.

64. Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{8}\,(24+23+26+22+25+24+32+24) = 25 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{7}\,(1^2+2^2+1^2+3^2+0^2+1^2+7^2+1^2) = \tfrac{66}{7} = 9,429 \\
s_x &= 3,071
\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 32 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{7}{3{,}071}\sqrt{\tfrac{8}{7}} = 2,437 \qquad \text{und} \qquad f = 6.$$

Da $r^* = 2,437$ größer als der entsprechende Tabellenwert $r = 2,208$ ist, wird $x^* = 32$ als Ausreißer festgestellt und dementsprechend aus der Stichprobe entfernt.

Wir betrachten nun also die verkürzte Stichprobe

$$24 \qquad 23 \qquad 26 \qquad 22 \qquad 25 \qquad 24 \qquad 24$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{7}\,(24+23+26+22+25+24+24) = 24 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{6}\,(0^2+1^2+2^2+2^2+1^2+0^2+0^2) = \tfrac{10}{6} = 1,667 \\
s_x &= 1,291
\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 22 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{2}{1{,}291}\sqrt{\tfrac{7}{6}} = 1,673 \qquad \text{und} \qquad f = 5.$$

Da $r^* = 1,673$ nicht größer als der entsprechende Tabellenwert $r = 2,142$ ist, wird $x^* = 22$ nicht als Ausreißer festgestellt; es handelt sich hierbei bereits um eine statistisch homogene Stichprobe.

65. Es ist

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{10}\,(61+66+58+63+58+62+62+59+51+60) = 60 \\
s_x^2 &= \tfrac{1}{9}\,(1^2+6^2+2^2+3^2+2^2+2^2+2^2+1^2+9^2+0^2) = \tfrac{144}{9} = 16 \\
s_x &= 4
\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 51 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{9}{4}\sqrt{\tfrac{10}{9}} = 2{,}372 \qquad \text{und} \qquad f = 8.$$

- Da $r^* = 2,372$ nicht größer als der Tabellenwert $r_{8;0,999} = 2,616$ ist, wird $x^* = 51$ zum Sicherheitsniveau 99,9 % nicht als Ausreißer festgestellt; es handelt sich in diesem Fall bereits um eine statistisch homogene Stichprobe.
- Da $r^* = 2,372$ größer als die Tabellenwerte $r_{8;0,99} = 2,294$ und $r_{8;0,95} = 1,895$ ist, wird $x^* = 51$ zum Sicherheitsniveau 99 % wie zum Sicherheitsniveau 95 % als Ausreißer festgestellt und dementsprechend aus der Stichprobe entfernt.

Für das Sicherheitsniveau 95 % bzw. 99 % betrachten wir nun also die verkürzte Stichprobe

61 66 58 63 58 62 62 59 60

Es ist

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \tfrac{1}{9}\,(61+66+58+63+58+62+62+59+60) = 61\\ s_x^2 &= \tfrac{1}{8}\,(0^2+5^2+3^2+2^2+3^2+1^2+1^2+2^2+1^2) = \tfrac{54}{8} = 6,75\\ s_x &= 2,598\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 66 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{5}{2,598}\sqrt{\tfrac{9}{8}} = 2,041 \qquad \text{und} \qquad f = 7.$$

- Da $r^* = 2,041$ nicht größer als der Tabellenwert $r_{7;0,99} = 2,256$ ist, wird $x^* = 66$ zum Sicherheitsniveau 99 % nicht als Ausreißer festgestellt; es liegt also in diesem Fall nunmehr eine statistisch homogene Stichprobe vor.
- Da $r^* = 2,041$ größer als der Tabellenwert $r_{7;0,95} = 1,885$ ist, wird $x^* = 66$ zum Sicherheitsniveau 95 % als Ausreißer festgestellt und dementsprechend aus der Stichprobe entfernt.

Für das Sicherheitsniveau 95 % betrachten wir nun also die nochmals verkürzte Stichprobe

61 58 63 58 62 62 59 60

Es ist

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \tfrac{1}{8}\,(61+58+63+58+62+62+59+60) = 60,375\\ s_x^2 &= \tfrac{1}{7}\,(0,625^2+2,375^2+2,625^2+2,375^2+1,625^2+\\ &\qquad\qquad +1,625^2+1,375^2+0,375^2) = 3,696\\ s_x &= 1,923\end{aligned}$$

Es ist

$$x^* = 63 \qquad \text{mit} \qquad r^* = \tfrac{2,625}{1,923}\sqrt{\tfrac{8}{7}} = 1,460 \qquad \text{und} \qquad f = 6.$$

- Da $r^* = 1,460$ nicht größer als der Tabellenwert $r_{6;0,95} = 1,870$ ist, wird $x^* = 63$ zum Sicherheitsniveau 95 % nicht als Ausreißer festgestellt; es liegt also endlich auch in diesem Fall eine statistisch homogene Stichprobe vor.