MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 6
30.11.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“
– Lösungsvorschlag –

41. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = e^x - 2$. Wegen

$$f'(x) < 0 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2$$

ist f auf $]-\infty, \ln 2]$ streng monoton fallend, und wegen

$$f'(x) > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$$

ist f auf $[\ln 2, +\infty[$ streng monoton steigend.
Damit besitzt f in $x_0 = \ln 2$ ein lokales Minimum mit

$$f(x_0) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2$$

b) Da f auf $]-\infty, \ln 2]$ streng monoton fällt mit

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{und} \qquad f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

und auf $[\ln 2, +\infty[$ streng monoton steigt mit

$$f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

gilt

$$W_f = [2 - 2\ln 2, +\infty[$$

c) Wegen $f''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt und besitzt damit keine Wendepunkte.

42. a) Es ist

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (1-x)\,e^{2-x}$$

sowie

$$f''(x) = (-1) \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2)\,e^{2-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es ist

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)\,e^{2-x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Wegen $f''(1) = -e < 0$ besitzt f in $x = 1$ das lokale Maximum $(1; e)$.

c) Wegen $f''(x) < 0$ für alle $x < 2$ und $f''(x) > 0$ für alle $x > 2$ besitzt f genau einen Wendepunkt, nämlich in $(2;2)$. Für die Wendetangente t gilt

$$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = (-1) \cdot (x-2) + 2 = -x + 4.$$

43. a) Wegen $f(x) = e^{2x} - e^x = e^x\,(e^x - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

$$f(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$$

$$f(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Demnach besitzt f in $x_0 = 0$ eine Nullstelle, und der Graph verläuft für $x < 0$ unterhalb sowie für $x > 0$ oberhalb der x–Achse.

b) Wegen $f'(x) = 2\,e^{2x} - e^x = e^x\,(2\,e^x - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) < 0 \iff 2\,e^x < 1 \iff e^x < \tfrac{1}{2} \iff x < -\ln 2$$

$$f'(x) > 0 \iff 2\,e^x > 1 \iff e^x > \tfrac{1}{2} \iff x > -\ln 2$$

Demnach ist f auf $]-\infty, -\ln 2]$ streng monoton fallend bzw. auf $[-\ln 2, \infty[$ streng monoton steigend; also besitzt f in $(-\ln 2, -\frac{1}{4})$ ein lokales Minimum.

c) Wegen

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^{2x} - e^x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^x\,(e^x - 1)) = \infty$$

gilt gemäß b)

$$W_f = [-\tfrac{1}{4}, \infty[$$

44. a) Es ist $f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$; damit ist $x = 1$ die einzige Nullstelle von f.

Es ist

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

sowie

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0, e[$ ist f auf $]0, e]$ streng monoton steigend; wegen $f'(x) < 0$ für alle $x \in]e, \infty[$ ist f auf $[e, \infty[$ streng monoton fallend. Damit besitzt f in $x_M = e$ ein lokales Maximum $(e, \frac{1}{e})$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot (-\frac{1}{x}) - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - 2\,(1 - \ln x)}{x^3} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

Es ist $f''(x) = 0 \iff 2 \ln x = 3 \iff x = e^{\frac{3}{2}}$; wegen $f''(x) < 0$ für alle $x < e^{\frac{3}{2}}$ und $f''(x) > 0$ für alle $x > e^{\frac{3}{2}}$ besitzt f in $x_W = e^{\frac{3}{2}}$ einen Wendepunkt $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}})$. Für die Wendetangente t gilt

$$t(x) = f'(x_W)\,(x - x_W) + f(x_W) = -\frac{1}{2}\, e^{-3}\,(x - e^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\, e^{-3}\, x + 2\, e^{-\frac{3}{2}}$$

e) Gemäß b) ist f auf $[e, \infty[$ streng monoton fallend. Damit gilt:

$$f(2008) > f(2009) \;\Rightarrow\; \frac{\ln 2008}{2008} > \frac{\ln 2009}{2009} \;\Rightarrow\; 2009 \ln 2008 > 2008 \ln 2009$$
$$\Rightarrow\; \ln 2008^{2009} > \ln 2009^{2008} \;\Rightarrow\; 2008^{2009} > 2009^{2008}$$

45. a) Für alle $x \in \,]0, \infty[$ gilt

$$f(x) = 0 \iff (\ln x)^2 = 4 \iff \ln x = \pm 2 \iff x = e^{\pm 2};$$

damit besitzt f zwei Nullstellen, nämlich $x_1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ und $x_2 = e^2$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = 2\, \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\, \ln x}{x} = \frac{2}{x}\, \ln x.$$

Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x > 1$ ist f auf $]1, \infty[$ streng monoton steigend, und wegen $f'(x) < 0$ für alle $0 < x < 1$ ist f auf $]0; 1[$ streng monoton fallend. Insbesondere besitzt f in $x = 1$ ein Minimum $T = (1; -4)$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt nach der Quotientenregel

$$f''(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - 2\, \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\, \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2}\,(1 - \ln x).$$

Wegen $f''(x) > 0$ für alle $0 < x < e$ ist f auf $]0; e[$ linksgekrümmt, und wegen $f''(x) < 0$ für alle $x > e$ ist f auf $]e, \infty[$ rechtsgekrümmt.

d) Gemäß c) besitzt f in $x = e$ einen Wendepunkt $W(e; -3)$, und für die Wendetangente t gilt

$$t(x) = f'(e)\,(x - e) + f(e) = \frac{2}{e}\,(x - e) - 3 = \frac{2}{e}\, x - 5$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

46. a) Wegen

$$f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) = \ln(x^2 + 1) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f eine gerade Funktion; der Graph G_f von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend, und wegen $f'(x) < 0$ für alle $x < 0$ ist f auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend. Damit besitzt f in $x_0 = 0$ ein (isoliertes lokales) Minimum $(0, 0)$.

c) Es ist

$$f''(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\,(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f''(x) > 0$ für alle $|x| < 1$ ist f auf $[-1, 1]$ linksgekrümmt, und wegen $f''(x) < 0$ für alle $|x| > 1$ ist f auf $]-\infty, -1]$ und $[1, \infty[$ jeweils rechtsgekrümmt. Damit besitzt f in $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ jeweils einen Wendepunkt, also insgesamt die beiden Wendepunkte $(\pm 1, \ln 2)$.

47. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_a(-x) = \frac{(-x)^2 - a^2}{(-x)^2 + a^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} = f_a(x);$$

damit ist f_a gerade und G_{f_a} achsensymmetrisch zur y–Achse.

Es ist $f_a(x) = 0 \iff x^2 = a^2 \iff x = \pm a$; damit besitzt f_a die beiden Nullstellen a und $-a$.

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_a'(x) = \frac{(x^2+a^2) \cdot 2x - (x^2 - a^2) \cdot 2x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{4a^2 x}{(x^2+a^2)^2}$$

Wegen $f_a'(x) < 0$ für alle $x < 0$ ist f_a auf $\mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend, wegen $f_a'(x) > 0$ für alle $x > 0$ ist f_a auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend.

Damit besitzt f_a in $x = 0$ ein lokales Minimum $(0, -1)$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= \frac{(x^2+a^2)^2 \cdot 4a^2 - 4a^2 x \cdot 2(x^2+a^2) \cdot 2x}{(x^2+a^2)^4} \\ &= \frac{4a^2x^2 + 4a^4 - 16a^2x^2}{(x^2+a^2)^3} = \frac{4a^2(a^2 - 3\,x^2)}{(x^2+a^2)^3} \end{aligned}$$

Wegen $f_a''(x) < 0$ für alle $a^2 < 3\,x^2$ ist f_a auf $]-\infty, -\frac{a}{\sqrt{3}}]$ und $[\frac{a}{\sqrt{3}}, \infty[$ jeweils rechtsgekrümmt; wegen $f_a''(x) > 0$ für alle $a^2 > 3\,x^2$ ist f_a auf $[-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}]$ linksgekrümmt.

Damit besitzt f_a in $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ die Wendepunkte $(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$ und $(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2})$.

d) Für die Wendetangenten t_1 und t_2 gilt

$$t_1(x) = \frac{4a^2(-\frac{a}{\sqrt{3}})}{(\frac{a^2}{3}+a^2)^2}\,(x+\frac{a}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4a}\,(x+\frac{a}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4a}\,x - \frac{5}{4}$$

sowie

$$t_2(x) = \frac{4a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{(\frac{a^2}{3}+a^2)^2}\,(x-\frac{a}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4a}\,(x-\frac{a}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4a}\,x - \frac{5}{4}$$

Wegen $t_1(0) = t_2(0) = -\frac{5}{4}$ liegt der Punkt $(0, -\frac{5}{4})$ auf t_1 und t_2.

48. a) Für alle $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\dot{C} &= C_1\left(\frac{-b}{(1+bt)^2} - \frac{-a}{(1+at)^2}\right)\\
&= \frac{C_1}{(1+at)^2\,(1+bt)^2}\cdot\left(-b\,(1+at)^2 + a\,(1+bt)^2\right)\\
&= \frac{C_1}{(1+at)^2\,(1+bt)^2}\cdot\left(-b - 2abt - a^2bt^2 + a + 2abt + ab^2t^2\right)\\
&= \frac{C_1}{(1+at)^2\,(1+bt)^2}\cdot\left(a - b - abt^2(a-b)\right)\\
&= \frac{C_1\,(a-b)\,(1-abt^2)}{(1+at)^2\,(1+bt)^2}
\end{aligned}$$

Wegen $\dot{C} > 0$ für alle $1-abt^2 > 0$ ist C für $t < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ streng monoton steigend; wegen $\dot{C} < 0$ für alle $1 - abt^2 < 0$ ist C für $t > \frac{1}{\sqrt{ab}}$ streng monoton fallend. Damit erreicht C bei $t = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ seinen höchsten Wert.

b) Bei

$$t = \frac{1}{\sqrt{0,625/\mathrm{h}\cdot 0,1/\mathrm{h}}} = 4\ \mathrm{h}$$

ist

$$\begin{aligned}
C &= 160\ \mathrm{mg}/100\ \mathrm{m}\ell + 120\ \mathrm{mg}/100\ \mathrm{m}\ell\cdot\left(\frac{1}{1+0,1\cdot 4} - \frac{1}{1+0,625\cdot 4}\right)\\
&= 211\ \mathrm{mg}/100\ \mathrm{m}\ell.
\end{aligned}$$

Der Cholesterinspiegel steigt zeitweise über den Wert von 200 mg/100 mℓ.