MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 5
16.11.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“
– Lösungsvorschlag –

34. a) Wegen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

und

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=2$$

und

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\infty.$$

b) Es ist

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{0}{16}=0$$

und

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Wegen

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$$

ist

$$\lim_{x\to2+}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\infty$$

und

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=-\infty;$$

der Grenzwert

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

existiert demnach nicht.

c) Wegen

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

gilt

$$a = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$$

mit

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1}\right| = \left|\frac{-2}{e^x + 1}\right| = \frac{2}{e^x + 1} < \varepsilon \iff$$
$$\iff \frac{2}{\varepsilon} < e^x + 1 \iff e^x > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \iff x > \ln(\frac{2}{\varepsilon} - 1).$$

Für $\varepsilon = 10^{-3}$ ergibt sich also $x_0 = \ln 1.999 \approx 7{,}60$.

35. a) $f'(r) = 2\pi r$ (Kreisumfang) und $g'(r) = 4\pi r^2$ (Kugeloberfläche)

b) $f'(x) = 6x^2 + 10x - 4$ und $g'(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$

c) $f'(t) = x^2 + 2x - 6t$ und $g(x) = 2tx + 2t$.

36. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f'(x) = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{6}{x^4}$

$D_g = \mathbb{R}$ mit $g'(x) = \dfrac{(1 + x^2) \cdot 1 - (2 + x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - 4x - x^2}{(1 + x^2)^2}$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ mit $h'(x) = \dfrac{(2 + x) \cdot 2x - (1 + x^2) \cdot 1}{(2 + x)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{(2 + x)^2}$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x - 5) \cdot 2 - (2x + 3) \cdot 4}{(4x - 5)^2} - \frac{(2x - 3) \cdot 4 - (4x + 5) \cdot 2}{(2x - 3)^2} \\ &= \frac{-22}{(4x - 5)^2} + \frac{22}{(2x - 3)^2} \end{aligned}$$

$D_g = \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(x^2 + x + 1) \cdot (3x^2 + 1) - (x^3 + x + 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{(3x^4 + x^2 + 3x^3 + x + 3x^2 + 1) - (2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

c) $D_f = \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \dfrac{(e^x + a) \cdot e^x - (e^x - a) \cdot e^x}{(e^x + a)^2} = \dfrac{2ae^x}{(e^x + a)^2}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\ln a\}$ mit $g'(x) = \dfrac{(e^x - a) \cdot e^x - (e^x + a) \cdot e^x}{(e^x - a)^2} = -\dfrac{2ae^x}{(e^x - a)^2}$

37. a) Es ist
$$f'(x) = 4\,(2x+3)^3 \cdot 2 = 8\,(2x+3)^3$$
mit $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ und
$$g'(x) = 3\,(2-3x^2)^2 \cdot (-6x) = -18\,x\,(2-3x^2)^2$$
mit $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$ sowie
$$h'(x) = 5\,(x^2-x+1)^4 \cdot (2x-1)$$
mit $D_h = D_{h'} = \mathbb{R}$.

b) Es ist
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
mit $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ und
$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
mit $D_g = [-1,1]$ und $D_{g'} =]-1,1[$ sowie
$$h'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
mit $D_h = [-1,1]$ und $D_{h'} =]-1,1[$.

c) Es ist
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+x^2)^3 \cdot 6(1+x)^5 - (1+x)^6 \cdot 3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} \\ &= \frac{(1+x)^5}{(1+x^2)^4} \cdot (6(1+x^2) - 6x\,(1+x)) \\ &= \frac{6\,(1-x)\,(1+x)^5}{(1+x^2)^4} \end{aligned}$$
mit $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ sowie
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot 1 - (1+x) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} \\ &= \frac{(1+x^2)-(1+x)\cdot x}{\sqrt{1+x^2}^3} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}^3} \end{aligned}$$
mit $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$.

d) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ mit $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$ mit $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}^+$

$h'(x) = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$ mit $D_h = D_{h'} =]1,\infty[$

38. a) Die Anzahl der Nullstellen von f_a hängt vom Vorzeichen der Diskrimante $(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = a^2 - 16$ ab:

$$\begin{array}{llllllll} a \in M_0 & \Longleftrightarrow & a^2 - 16 < 0 & \Longleftrightarrow & a^2 < 16 & \Longleftrightarrow & |a| < 4 \\ a \in M_1 & \Longleftrightarrow & a^2 - 16 = 0 & \Longleftrightarrow & a^2 = 16 & \Longleftrightarrow & |a| = 4 \\ a \in M_2 & \Longleftrightarrow & a^2 - 16 > 0 & \Longleftrightarrow & a^2 > 16 & \Longleftrightarrow & |a| > 4 \end{array}$$

b) Für $a \in M_2$ gilt $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 16}\right)$. Daher gilt:

$$|x_1 - x_2| = 3 \iff \sqrt{a^2 - 16} = 3 \iff$$
$$\iff a^2 - 16 = 9 \iff a^2 = 25 \iff |a| = 5$$

c) Für die Tangente t an den Graphen G_{f_a} im Punkte x_0 gilt

$$\begin{aligned} t(x) &= f_a'(x_0) \cdot (x - x_0) + f_a(x_0) \\ &= (2\,x_0 - a)(x - x_0) + (x_0^2 - a\,x_0 + 4) \\ &= 2\,x_0\,x - 2\,x_0^2 - a\,x + a\,x_0 + x_0^2 - a\,x_0 + 4 \\ &= (2\,x_0 - a)\,x + (4 - x_0^2) \end{aligned}$$

Demnach gilt:

$$t \text{ geht durch den Ursprung} \iff t(0) = 0 \iff$$
$$\iff 4 - x_0^2 = 0 \iff x_0^2 = 4 \iff x_0 = \pm 2$$

39. a) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{2} = \infty.$$

b) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x+1}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} = \infty$$

c) $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

Es ist

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

40. a) Es ist

$$v = \dot{s} = 6t - \frac{3}{10}t^2 \qquad \text{und} \qquad a = \dot{v} = 6 - \frac{3}{5}t.$$

b) Wegen

$$a > 0 \iff 6 > \frac{3}{5}t \iff 10 > t$$

wird der Wagen im Zeitraum [0 s, 10 s] beschleunigt. Wegen

$$a < 0 \iff 6 < \frac{3}{5}t \iff 10 < t$$

wird der Wagen im Zeitraum [10 s, 20 s] abgebremst.
Wegen $v(0) = v(20) = 0$ beträgt die mittlere Beschleunigung im Zeitraum [0 s, 20 s]

$$\frac{v(20) - v(0)}{20 - 0} = 0.$$

c) Gemäß den Überlegungen von a) ist der Wagen bei 0 s und 20 s am langsamsten (er steht sogar) sowie bei 10 s am schnellsten. Damit ist $v_{\max} = v(10) = 30$ [ms^{-1}]; die mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum [0 s, 20 s] beträgt

$$\frac{s(20) - s(0)}{20 - 0} = \frac{500 - 100}{20 - 0} = 20\ [\mathrm{ms}^{-1}].$$