MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Priv.-Doz. Dr. Peter Schuster

Winter 2010/11
Blatt 4
09.11.2010

Übungen zum Seminar „Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten“
– Lösungsvorschlag –

26. a) Es gilt

$$-2 = f(0) = c$$

sowie

$$-\frac{7}{4} = f(1) = a + c, \qquad \text{also} \qquad a = -\frac{7}{4} - c = \frac{1}{4}.$$

Ferner gilt

$$14 = f(16) = \frac{1}{4}\,16^b - 2, \qquad \text{also} \qquad 16^b = 16 \cdot 4$$

und damit $b = \frac{3}{2}$.

b) Für $x \geq 0$ gilt

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} = 2 \iff x^{\frac{3}{2}} = 8 \iff x = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

Da die Funktionen $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ und damit auch $x \mapsto \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$ jeweils den Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$ besitzen, gilt $W_f = [-2, \infty[$.

c) Für alle $y \in [-2, \infty[$ gilt:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} - 2 \\ &\iff \quad x^{\frac{3}{2}} = 4\,y + 8 \\ &\iff \quad x = (4\,y + 8)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Damit gilt $f^{-1}(y) = (4\,y + 8)^{\frac{2}{3}}$ für alle $y \in [-2, \infty[$.

d) Die Potenzfunktion $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ und damit auch $x \mapsto \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$ sowie f sind streng monoton wachsend; dies überträgt sich auch auf f^{-1}.

27. a) Es gilt

$$\begin{array}{lllll} f(0) & = & c - a & = & 6 \qquad (\text{wegen } (0,6) \in G_f) \\ f(1) & = & c - a\,b & = & 18 \qquad (\text{wegen } (1,18) \in G_f) \\ f(2) & = & c - a\,b^2 & = & 26 \qquad (\text{wegen } (2,26) \in G_f) \end{array}$$

und damit

$$12 = f(1) - f(0) = (c - a\,b) - (c - a) = a\,(1 - b)$$

sowie

$$8 = f(2) - f(1) = (c - a\,b^2) - (c - a\,b) = a\,b\,(1 - b).$$

Insgesamt erhält man

$$8 = [a\,(1 - b)] \cdot b = 12\,b \qquad \text{und folglich} \qquad b = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

woraus sich

$$12 = a\,(1 - b) = a \cdot (1 - \frac{2}{3}) = \frac{a}{3}, \qquad \text{also} \qquad a = 36$$

und

$$6 = c - a = c - 36, \qquad \text{also} \qquad c = 42$$

ergibt.

b) Für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$x_1 < x_2 \underset{0<b<1}{\Rightarrow} b^{x_1} > b^{x_2} \underset{a>0}{\Rightarrow} a\,b^{x_1} > a\,b^{x_2} \Rightarrow c - a\,b^{x_1} < c - a\,b^{x_2}$$

Es ist also $f(x_1) < f(x_2)$; folglich ist f streng monoton wachsend.
Zu demselben Ergebnis gelangt man auch mit Hilfe der Differentialrechnung: es ist

$$f(x) = c - a\,b^x = c - a\,e^{x \ln b}$$

und damit

$$f'(x) = -a\,e^{x \ln b} \cdot \ln b > 0 \qquad (\text{wegen } \; -a \cdot \ln b > 0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist f streng monoton wachsend.
Ferner erhält man wegen

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = \infty \qquad \text{also} \;\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

und

$$\lim_{x \to \infty} b^x = 0 \qquad \text{also} \;\lim_{x \to \infty} f(x) = c = 42$$

für den Wertebereich $W_f =]-\infty, 42[$.

c) Für alle $y \in W_f =]-\infty, 42[$ gilt:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = c - a \cdot b^x \\ &\Longleftrightarrow \quad a \cdot b^x = c - y \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln a + x \ln b = \ln(c - y) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln(c - y) - \ln a}{\ln b} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$f^{-1}(y) = \frac{\ln(42 - y) - \ln 36}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln(42 - y) - 2 \ln 6}{\ln 2 - \ln 3}$$

28. a) Die Anzahl der zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2 noch nicht zerfällenen Atome beträgt $N(t_1)$ bzw. $N(t_2)$; für den Anteil der nach dem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ noch nicht zerfallenen Atome gilt demnach

$$\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \frac{N_0 \cdot e^{-\lambda t_2}}{N_0 \cdot e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2 - (-\lambda t_1)} = e^{-\lambda (t_2 - t_1)} = e^{-\lambda \Delta t}$$

b) Es ist

$$N(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} N_0 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -\lambda T_{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

Demnach gilt

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$

c) Sind zum Zeitpunkt t bereits 25 % der Atome zerfallen, so gilt

$$N(t) = \frac{3}{4} N_0 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; -\lambda t = \ln\frac{3}{4} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t = -\frac{\ln\frac{3}{4}}{\lambda} = -\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \cdot T_{\frac{1}{2}} = 0{,}415\; T_{\frac{1}{2}}$$

Sind zum Zeitpunkt t bereits 75 % der Atome zerfallen, so gilt

$$N(t) = \frac{1}{4} N_0 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; -\lambda t = \ln\frac{1}{4} = -2\ln 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t = \frac{2\ln 2}{\lambda} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} \cdot T_{\frac{1}{2}} = 2\, T_{\frac{1}{2}}$$

d) Sind zum Zeitpunkt t noch 10 % der Atome nicht zerfallen, so gilt

$$N(t) = 0{,}1\; N_0 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t} = 0{,}1 \;\Rightarrow\; -\lambda t = \ln\frac{1}{10} = -\ln 10 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t = \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot T_{\frac{1}{2}} = 3{,}32\; T_{\frac{1}{2}}$$

Sind zum Zeitpunkt t noch 1 % der Atome nicht zerfallen, so gilt

$$N(t) = 0{,}01\; N_0 \;\Rightarrow\; e^{-\lambda t} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; -\lambda t = \ln\frac{1}{100} = -2\ln 10 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t = \frac{2\ln 10}{\lambda} = \frac{2\ln 10}{\ln 2} \cdot T_{\frac{1}{2}} = 6{,}64\; T_{\frac{1}{2}}$$

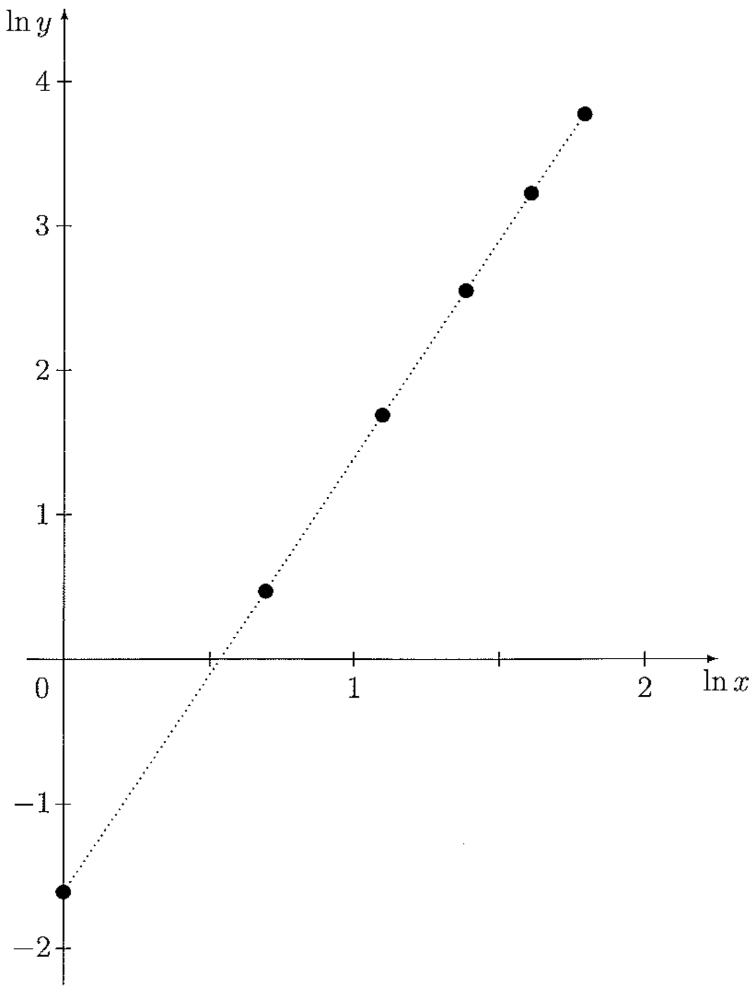
29. Es ist

$$\begin{aligned} y = a\,x^b \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln y = \ln\left(a\,x^b\right) = \ln a + \ln\left(x^b\right) = \ln a + b\,\ln x \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln y \text{ ist eine lineare Funktion von } \ln x, \\ &\qquad\quad \text{nämlich } \ln y = \ln a + b\,\ln x \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Die Wertepaare } (\ln x_i, \ln y_i) \text{ liegen auf der Geraden} \\ &\qquad\quad \text{mit Steigung } b \text{ und Ordinatenabschnitt } \ln a. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$\ln x$	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792
$\ln y$	−1,609	0,470	1,686	2,549	3,219	3,766

Trägt man nun die Wertepaare $(\ln x_i, \ln y_i)$ in ein Koordinatensystem ein, so erkennt man, daß sie auf einer Geraden liegen:



folglich genügt y bezüglich x einem allometrischen Wachstumsgesetz $y = a\,x^b$ mit geeigneten Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$.

Etwa mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 6$ gilt

$$b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{3{,}766 - (-1{,}609)}{1{,}792 - 0{,}000} = \frac{5,375}{1,792} = 3{,}0$$

und damit

$$a = \frac{y_1}{x_1^3} = \frac{0,2}{1^{3{,}0}} = 0{,}20.$$

Insgesamt erhält man also $y = \frac{1}{5}\,x^3$.

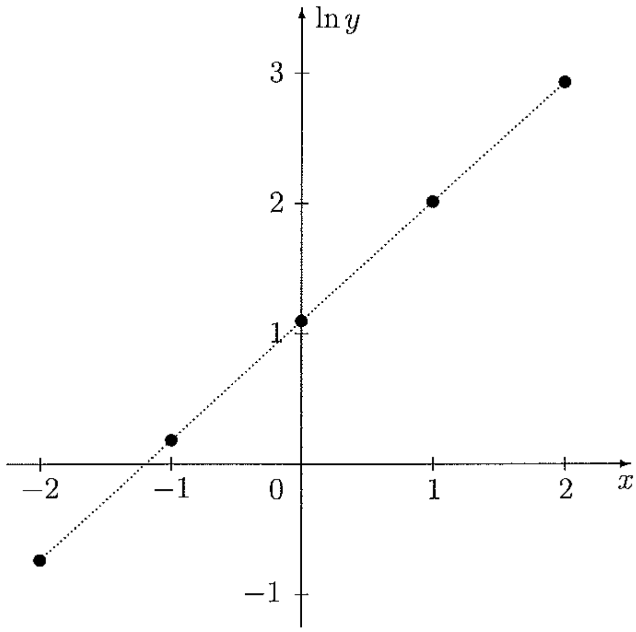
30. Es ist

$$
\begin{aligned}
y = a\,b^x \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln y = \ln(a\,b^x) = \ln a + \ln(b^x) = \ln a + x\,\ln b \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln y \text{ ist eine lineare Funktion von } x, \\
&\qquad\quad \text{nämlich } \ln y = \ln a + x \ln b \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Die Wertepaare } (x_i, \ln y_i) \text{ liegen auf der Geraden} \\
&\qquad\quad \text{mit Steigung } \ln b \text{ und Ordinatenabschnitt } \ln a.
\end{aligned}
$$

Dabei gilt

x	-2	-1	0	1	2
$\ln y$	$-0{,}734$	$0{,}182$	$1{,}099$	$2{,}015$	$2{,}931$

Trägt man nun die Wertepaare $(x_i, \ln y_i)$ in ein Koordinatensystem ein, so erkennt man, daß sie auf einer Geraden liegen:



folglich genügt y bezüglich x einem Wachstumsgesetz $y = a\,b^x$ mit geeigneten Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$.

Etwa mit $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ gilt

$$
b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}931 - (-0{,}734)}{2 - (-2)} = \frac{3{,}665}{4} = 0{,}916, \quad \text{also} \quad b = 2{,}5
$$

und schließlich mit $x_0 = 0$

$$
a = y_0\, b^{-x_0} = y_0 = 3{,}0.
$$

Insgesamt erhält man also $y = 3 \cdot 2{,}5^x$.

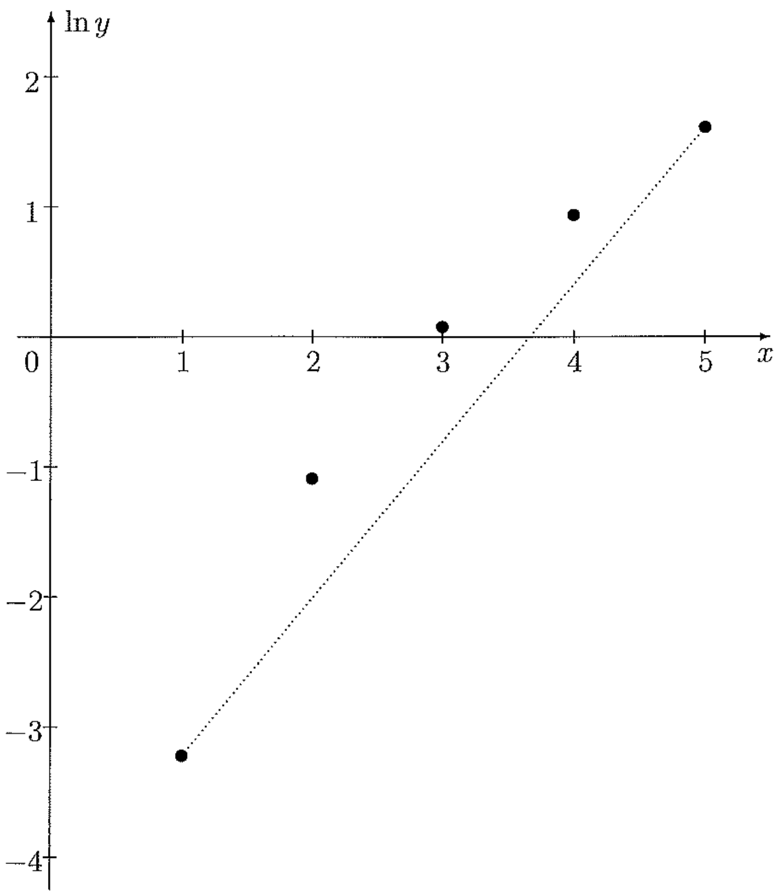
31. a) Es ist

$$y = a\,b^x \iff \ln y = \ln a + x \ln b$$
$$\iff \text{Die Wertepaare } (x_i, \ln y_i) \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

Dabei gilt

x	1	2	3	4	5
$\ln y$	−3,22	−1,14	0,08	0,94	1,61

Trägt man nun die Wertepaare $(x_i, \ln y_i)$ in ein Koordinatensystem ein, so erkennt man, daß sie nicht auf einer Geraden liegen; folglich genügt y bezüglich x nicht einem natürlichen Wachstumsgesetz $y = a\,b^x$.



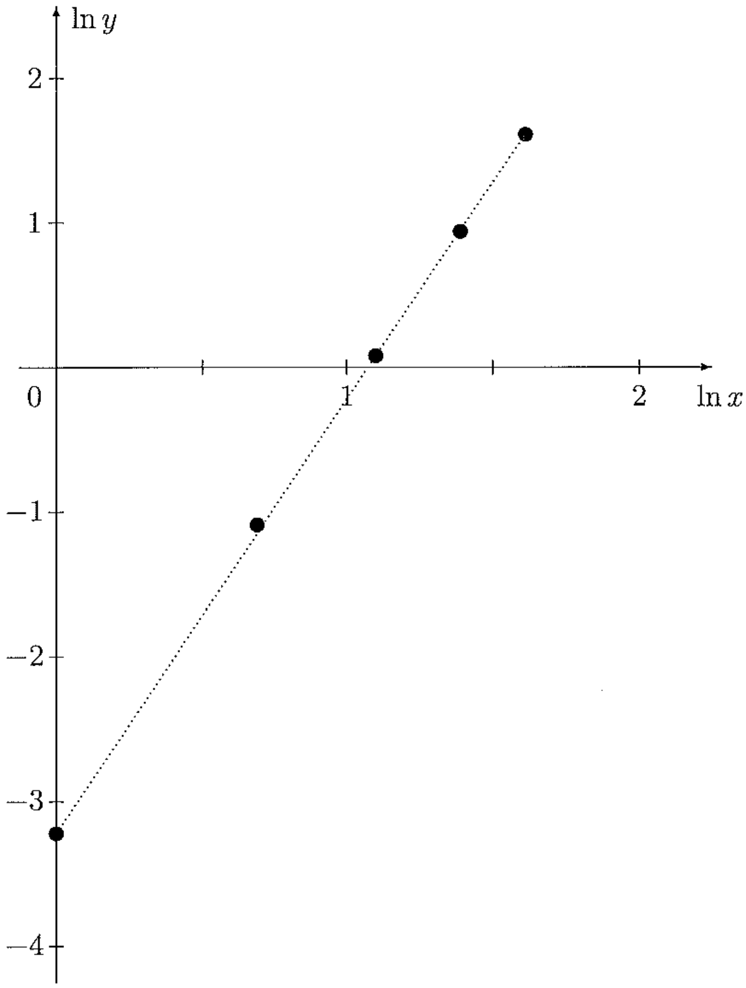
b) Es ist

$$y = a\,x^b \iff \ln y = \ln a + b \ln x$$
$$\iff \text{Die Wertepaare } (\ln x_i, \ln y_i) \text{ liegen auf einer Geraden.}$$

Dabei gilt

$\ln x$	0	0,69	1,10	1,39	1,61
$\ln y$	−3,22	−1,14	0,08	0,94	1,61

Trägt man nun die Wertepaare $(\ln x_i, \ln y_i)$ in ein Koordinatensystem ein, so erkennt man, daß sie auf einer Geraden liegen; folglich genügt y bezüglich x einem allometrischen Wachstumsgesetz $y = a\,x^b$ mit geeigneten Konstanten $a,\ b \in \mathbb{R}$.



c) Gemäß a) und b) genügt y bezüglich x einem allometrischen Wachstumsgesetz $y = a\,x^b$ mit geeigneten Konstanten $a,\ b \in \mathbb{R}$. Etwa mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ ergibt sich

$$b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{1{,}61 - (-3{,}22)}{1{,}61 - 0} = 3{,}00$$

und schließlich mit $x_1 = 1$

$$a = y_1\, x_1^{-b} = y_1 = 0{,}04.$$

Insgesamt erhält man also $y = 0{,}04 \cdot x^3$.

32. a) Es ist

t	10	20	40	60	80
$\ln c$	3,9543	3,8144	3,5343	3,2542	2,9745

Die Wertepaare $(t_i, \ln c_i)$ liegen auf einer Geraden mit negativer Steigung.

b) Es ist

$$c(t) = c_0\, e^{\lambda t} \iff \ln c(t) = \ln c_0 + \lambda\, t$$

Etwa mit der Wahl $t_1 = 10$ und $t_2 = 80$ erhält man

$$\lambda = \frac{\ln c_2 - \ln c_1}{t_2 - t_1} = \frac{2{,}9745 - 3{,}9543}{80 - 10} = -0{,}014$$

und

$$c_0 = c(t_1) \cdot e^{-\lambda t_1} = 52,16 \cdot e^{0{,}014 \cdot 10} = 60$$

Es gilt also

$$c(t) = 60 \cdot e^{-0{,}014\, t}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} c(30) &= 60 \cdot e^{-0{,}014 \cdot 30} = 39{,}42 \\ c(50) &= 60 \cdot e^{-0{,}014 \cdot 50} = 29{,}80 \\ c(70) &= 60 \cdot e^{-0{,}014 \cdot 70} = 22{,}52 \end{aligned}$$

d) Es ist

$$c(t) = 60 \cdot e^{-0{,}014\, t} = 60 \cdot 10^{-0{,}014\, t \cdot \lg e} = 60 \cdot 10^{-6{,}08 \cdot 10^{-3}\, t}$$

33. a) Es ist

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter
$\ln r$	−0,9493	−0,3243	0,4187	1,6487
$\ln t$	−1,4230	−0,4861	0,6313	2,4732

	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
$\ln r$	2,2555	2,9549	3,4045	3,6839
$\ln t$	3,3844	4,4308	5,1047	5,5122

Die Wertepaare $(\ln r_i, \ln t_i)$ liegen auf einer Ursprungsgeraden.

b) Es ist $\frac{\ln t}{\ln r} = c$ konstant. Etwa mit den Werten für den Jupiter gilt

$$c = \frac{\ln t_{\text{Jupiter}}}{\ln r_{\text{Jupiter}}} = \frac{2{,}4732}{1{,}6487} = 1,50 = \frac{3}{2}$$

Damit erhalten wir $\ln t = \frac{3}{2} \ln r$.

c) Es ist $t = r^{\frac{3}{2}}$ oder $t^2 = r^3$, es gilt also $t_1^2 : t_2^2 = r_1^3 : r_2^3$.