Übungen zur mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten

Frau Dr. S. Carr

Blatt 4

Aufgabe 24. c) Gegeben sei die quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 8x + 6$. Auf welchen maximalen Teilbereiche des Definitionsbereichs und des Wertebereichs ist f umkehrbar? Man gebe für jeden dieser Teilbereiche die Umkehrfunktion f^{-1} explizit an.

Aufgabe 25. Es bezeichne c (in g/ℓ) die Konzentration der Substanz A zum Zeitpunkt t (in Stunden) im Laufe eines 24-stündigen Experiments; damit läßt sich die Konzentration c als Funktion f der Zeit t auffassen. Der zeitliche Verlauf von $c = f(t)$ werde dabei durch die Funktion

$$f : [0, 24] \to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{13}{\sqrt{100 + t^2}}$$

quantativ erfaßt.

a) Man bestimme jeweils die Konzentration c zu Beginn des Experiments sowie nach 6, 12, 18 und 24 Stunden.

b) Für alle $t_1, t_2 \in [0, 24]$ gilt genau eine der beiden Aussagen. Ist i) oder ii) richtig?

  i) Wenn $t_1 < t_2$, dann $f(t_1) < f(t_2)$ (streng monoton steigend).

  ii) Wenn $t_1 < t_2$, dann $f(t_1) > f(t_2)$ (streng monoton fallend).

c) Man gebe den Bereich W_f aller während des Versuchs auftretenden Konzentrationen an.

d) Man gebe die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to [0, 24]$ von f an und interpretiere f^{-1} im Rahmen des vorliegenden Experiments.

e) In welchem Zeitraum liegt die Konzentration zwischen 1,0 g/ℓ und 0,8 g/ℓ?

Aufgabe 26. Es seien a, b und c reelle Zahlen mit $b > 0$ gegeben. Von der Funktion $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^b + c$, ist bekannt, daß die Punkte (0,-2), (1,$-\frac{7}{4}$) und (16,14) auf dem Graphen G_f liegen.

i) Man bestimme die reellen Konstanten a, b und c.

ii) Man bestimme die Nullstelle sowie den Wertebereich W_f von f.

iii) Man gebe die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1} von f an.

iv) Sind die Funktionen f^{-1} und f streng monoton fallend oder streng monoton steigend?

Aufgabe 27. Ausgelassen

Aufgabe 28. Für die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atome $N(t)$ einer radioaktiven Substanz gilt $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl der Beginn der Messung noch nicht zerfallenen Atome bezeichnet; λ heißt hierbei die *Zerfallskonstante*.

a) Nach der *Halbwertszeit* $T_{1/2}$ liegt noch die Hälfte aller Atome unzerfallen vor. Man gebe den Zusammenhang zwischen $T_{1/2}$ und der Zerfallskonstante λ an.

b) Zu welchem Zeitpunkt sind bereits 25% bzw. 75% der ursprünglich vorhandenen Atome zerfallen?

c) Zu welchem Zeitpunkt sind noch 10% bzw. 1% der ursprünglich vorhandenen Atome nicht zerfallen?

Aufgabe 29. Es sei die folgende Wertetabelle für die Größen x und y gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
y	0,2	1,6	5,4	12,8	25,0	43,2

Man bestätige mit Hilfe eines graphischen Tests, daß y bzgl. x einem „allometrischen“ Wachstumsgesetz $y = ax^b$ mit geeigneten Konstanten a und $b \in \mathbb{R}$ genügt, und bestimme diese Konstanten a und b.

Aufgabe 30. Ausgelassen

Aufgabe 31. Es sei die folgende Wertetabelle für die Größen x und y gegeben:

x	1	2	3	4	5
y	0,04	0,32	1,08	2,56	5,00

i) Man entscheide mit Hilfe eines graphischen Tests, ob y bzgl. x einem „natürlichen“, $y = ab^x$, oder einem „allometrischen“ $y = ax^b$ mit geeigneten Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ genügt, und gebe eine Begründung für die Entscheidung.

ii) Man bestimme die Konstanten a und b.

Aufgabe 32. Bei einem Konzentrationsverlauf, der in der From $c(t) = c_0 e^{\lambda t}$ dargestellt werden soll, werde die folgende Wertetabelle erhoben:

t [min]	10	20	40	60	80
c [mol/ℓ]	52,16	45,35	34,27	25,9	19,58

i) Man stelle $\ln c$ als Funktion von t dar.

ii) Man bestimme die Werte c_0 und λ.

iii) Man bestimme die Konzentration c nach 30 min, 50 min und 70 min.

iv) Wie lautet die Formel für $c(t)$, wenn man darin die Basis e durch 10 ersetzt?

Aufgabe 33. Die folgende Tabelle enthält (bezogen auf die entsprechenden Werte der Erde) den relativen Bahnradius r sowie die relative Umlaufzeit t der anderen sieben Planeten unseres Sonnensystems.

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
r	0,387	0,723	1,52	5,20	9,54	19,2	30,1
t	0,241	0,615	1,88	11,86	29,5	84,0	164,8

i) Man berechne die Wertepaare $(\ln r, \ln t)$ und skizziere den Graphen von $\ln t$ als Funktion von $\ln r$.

ii) Man bestimme die Gleichung von $\ln t$ als Funktion von $\ln r$.

iii) Man bestimme die Gleichung von t als Funktion von r und leite daraus das 3. Kepler-Gesetz her:

$$T = k\sqrt{R^3},$$

wobei $k =$ eine Konstante $(4\pi^2/GM)$ ist und T [s] und R [m] die absolute Umlaufzeit und den absoluten Bahnradius bezeichnen.